# Estudo sobre escalas logarítmicas

## I.2. UNIDADES DE MEDIDAS E TÉCNICAS DE MEDIÇÃO.

### I.2.1. Introdução

Antes de enveredarmos pelos caminhos do decibel (dB) faz-se necessário um pequeno estudo a respeito de unidades de medidas, medidas de grandeza e suas técnicas de medição. Tal estudo tem por objetivo melhor direcionar nosso raciocínio para a questão a qual envolve a grande utilização das unidades de medidas (decibel ) e suas técnicas em telecomunicações e, mais especificamente, em sistemas de transmissão.

### I.2.2. Multiplicadores

Em Telecomunicações é muito comum representar números muito grande ou números muito pequenos com a ajuda de prefixos multiplicadores. Os mais comuns são:

| Simbolo | Prefixo | Multiplicador |
|---|---|---|
| T | tera | 1.000.000.000.000 ($10^{12}$) |
| G | giga | 1.000.000.000 ($10^{9}$) |
| M | mega | 1.000.000 ($10^{6}$) |
| K | kilo | 1.000 ($10^{3}$) |
| m | mili | 0.001 ($10^{-3}$) |
| μ | micro | 0.000001 ($10^{-6}$) |
| n | nano | 0.000000001 ($10^{-9}$) |
| p | pico | 0.000000000001 ($10^{-12}$) |

Exemplo:

- A capacitância de um capacitor é de 0,000000000012 (F). Nota-se que esse número é pouco prático, porém, se usarmos um prefixo multiplicador adequado tem-se: 12 (pF), ou seja, 12 pico Farad.

- A resistência de um resistor é de 1.500.000 (Ω). Nota-se que esse número também é pouco prático, porém, se usarmos um prefixo multiplicador adequado tem-se: 1,5 (MΩ), ou seja, 1,5 mega ohms.

Concluímos, portanto, que o uso dos multiplicadores facilita muito o trabalho com números muito grandes ou muito pequenos.

### I.2.3. Necessidade de Unidades

Medir uma grandeza é compara-la com outra de mesma espécie, preestabelecida e chamada unidade. A unidade de medida deve ser escolhida de maneira que os resultados de diversas medidas sejam números fáceis de serem manuseados. Por exemplo: o peso de um voyage é de 1,24 T (tonelada), enquanto que o peso de uma lata de sardinha é 132g (gramas). Portanto, podemos dizer que o voyage é 1,24 vezes mais pesado que a unidade tonelada e, que a lata de sardinha é 132 vezes mais pesada que sua unidade padrão, 1 grama.

Poderíamos usar a unidade grama (g) para informar o peso do voyage: 1.240.000 g. E a unidade tonelada para informar o peso da lata de sardinha: 0,000132 T. Isto é matematicamente correto, porém, pouco prático.

### I.2.4. Necessidade de Unidades Logarítmicas

Geralmente utiliza-se dois tipos de logaritmos: O comum e o natural. O logaritmo natural é indicado pela notação $Log_e$ e tem como base o número 2,718. O logaritmo natural é também chamado de logaritmo neperiano e tem como unidade o Neper. Já o logaritmo comum tem como base o número 10 (dez) e é designado pela notação $Log_{10}$ ou simplesmente *Log*.

O logaritmo é uma operação matemática assim como a multiplexação, a divisão, a soma e a subtração. Calcular o logaritmo de um número é descobrir qual a potência a qual devemos elevar a base para obtermos o mesmo número. Ou seja:

a) *Log* 100 = 2; pois devemos elevar a base 10 a segunda potência para obtermos o número 100 **( $10^2 = 100$ )**

b) *Log* 1000 = 3, pois devemos elevar a base 10 a terceira potência para obtermos o núm.1000 **( $10^3 = 1000$ )**

c) $log_e$ 100 = 4,605; pois devemos elevar a base 2,718 a 4,605 para obtermos o número 100 **( $2,718^{4,605} = 100$ )**

d) $log_e$ 1000 = 6,9077; pois devemos elevar 2,718 a 6,9077 para obtermos o número 1000 ( **$2,718^{6,9077} = 1000$ )**

**Obs. Uma segunda notação pode ser usada no cálculo de logaritmos naturais, que é: *Ln* ( logaritmo neperiano )**

| Número ( Nº ) | Potência de Dez | *Log* do número (Nº) |
|---|---|---|
| 1.000.000 | $10^6$ | 6 |
| 100.000 | $10^5$ | 5 |
| 10.000 | $10^4$ | 4 |
| 1.000 | $10^3$ | 3 |

| | | |
|---|---|---|
| 100 | $10^{2}$ | 2 |
| 10 | $10^{1}$ | 1 |
| 1 | $10^{0}$ | 0 |
| 0,1 | $10^{-1}$ | -1 |
| 0,01 | $10^{-2}$ | -2 |
| 0,001 | $10^{-3}$ | -3 |
| 0,0001 | $10^{-4}$ | -4 |
| 0,00001 | $10^{-5}$ | -5 |
| 0,000001 | $10^{-6}$ | -6 |

Mas, para que utilizar o logaritmo ?

Vejamos bem! Se tomarmos a variação numérica de 0,000001 até 1.000.000 veremos que é bastante extensa e, portanto torna-se inviável medidores com escalas decimais para variações tão grande. Porém, se tomarmos os correspondentes logaritmos desses números veremos que a extensão da variação vai de –6 até +6.Conclui-se, portanto, que o uso do logaritmo como unidade comprimi a escala, resultando com que, praticamente, todas as medidas de nível de potência em Telecomunicações sejam logarítmicas, visto que temos equipamentos (transmissores) com potências que chegam a dezenas de Kilowatts e equipamentos (receptores) que trabalham com sinais da ordem de dezenas de microwatts.

O logaritmo nos permite também, simplificar operações que envolvam multiplicação e divisão, por exemplo. A multiplicação é reduzida a uma simples adição e a divisão a uma simples subtração. Isto, graças às propriedades matemáticas dos logaritmos. Vejamos;

- *Log  (A x B ) = Log (A) + Log (B)*
- *Log (A / B ) = Log (A) – Log (B)*

## I.2.5. Relação de Potências

Quando uma informação é enviada de um ponto a outro, os sinais elétricos passam através de diversos elementos que compõem o sistema de transmissão. Pode-se considerar um sistema de transmissão como sendo um quadripolo para simplificar o seu estudo. Um quadripolo é uma “caixa preta” ( pois, a princípio não nos interessa o que há dentro ) com dois terminais de entrada e dois terminais de saída.

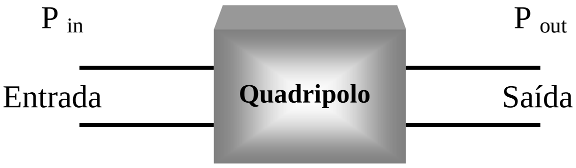
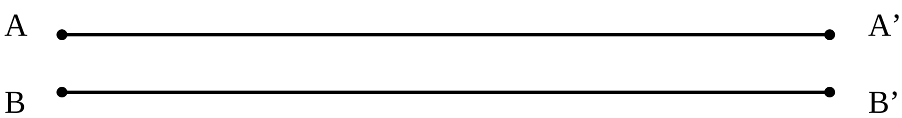



Figura 01

Para melhor explicar a natureza do quadripolo mostrado, vamos definir, como exemplo, dois tipos de parâmetros das linhas físicas de comunicação:

- Parâmetros primários
- Parâmetros secundários

A figura a seguir é uma linha de transmissão física.




Tomando esta linha, podemos verificar que ela é composta de elementos, tais como: resistência / indutância / capacitância e condutância por unidade de comprimento.

Colocar figura do quadripolo

Figura 02

Estes elementos fazem parte da composição de uma linha de transmissão, e são denominadas de ***Parâmetros Primários*** das linhas.

Os ***Parâmetros Secundários*** da linha de transmissão são denominados de Impedância Característica e Fator de Propagação. No estudo das unidades de medidas para sistemas de transmissão esses dois parâmetros ocupam um papel de destaque.

A **Impedância Característica** é aquela vista em qualquer ponto da linha e é dada pela seguinte expressão:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + jwC}{G + jwL}} \qquad \text{( I.1 )}$$

O **Fator de Propagação** é dado pela seguinte expressão:

$$Y = \sqrt{(R + jwL).(G + jwC)} = \mathrm{a + jb} \qquad \text{(I.2)}$$

- O valor de "a" é dado em *Neper por Km* e eqüivale à atenuação do circuito. Um Neper eqüivale a 8,686 dB, sendo denominado de constante de atenuação.

- O valor "b" é denominado de constante de fase e seu valor é dado em radianos por segundo.

Logo, considerando-se que na entrada do quadripolo demonstrado, tem-se uma potência $P_{in}$ e, na saída tem-se uma potência $P_{out}$, chamamos de relação de potência do quadripolo a relação entre a potência de saída e a potência de entrada.

$$\text{Relação de Potência} = \frac{Pout}{Pin}$$

$$\mathrm{RP} = \frac{Pout}{Pin} \qquad \text{(I.3)}$$

Se tivermos N quadripolos ligados em série, teremos:

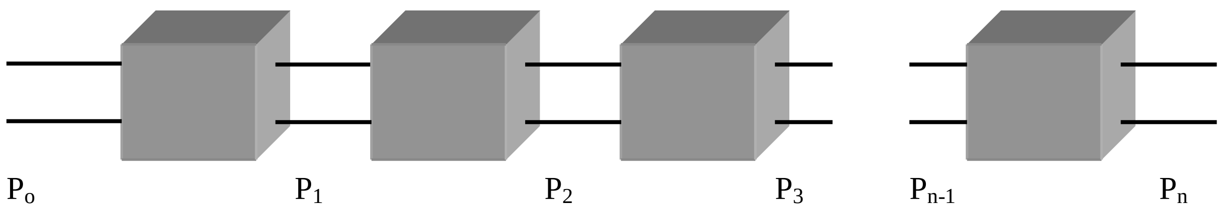



Figura 3

$$RP_{total} = \frac{P_n}{P_0} = \frac{P_1}{P_0} x \frac{P_2}{P_1} x \frac{P_3}{P_2} x ... x \frac{P_n}{P_{n-1}} \quad \text{( I.4 )}$$

Chamamos $\frac{P_n}{P_{n-1}}$ de $G_n$ , teremos: $RP_{total} = G_1 \text{ x } G_2 \text{ x } G_3 \text{ x } G_4 \text{ x } ... \text{x } G_n$ ( I.5 )

Portanto, para N quadripolos em série, a relação de potência total é igual ao produto das relações de potências individuais dos N quadripolos.

## I.2.6. Atenuação e Ganho

Em muitos circuitos envolvendo sistemas de telecomunicações, nós podemos encontrar sistemas que amplificam os sinais ( Ganho ) e os que atenuam os sinais ( Atenuação ). Tanto o ganho como a atenuação são números adimensionais, pois os dois níveis são expressos na mesma unidade.

Em sistemas ou circuitos podemos ter basicamente três situações no que diz respeito a relação de potências.

- Potência de saída maior que a potência de entrada – ( $P_{out} > P_{in}$ )
  Nesta Situação dizemos que o sinal sofreu um ganho e, portanto, o sistema ou circuitos envolvidos no processo recebe o nome de amplificador.

- Potência de saída menor que potência de entrada - ( $P_{out} < P_{in}$ )
  Nesta situação dizemos que o sinal sofreu uma atenuação e, portanto, o sistema ou circuito envolvido no processo recebe o nome de atenuador.

- Potência de saída igual a potência de entrada - ( $P_{out} = P_{in}$ )
  Nesta situação não temos um amplificador e nem mesmo um atenuador e, portanto, o sistema ou circuito envolvido no processo recebe o nome de isolador ou buffer.

### I.2.6.1. Relação de Potência Usando Escalas Logarítmicas.

Vimos que a relação de potência do quadripolo da figura 1 é dada por:

$$RP = \frac{Pout}{Pin} \quad \text{( I.6 )}$$

Se os resultados desta relação de potências abranger uma faixa muito extensa de valores decimais, fica inviável a construção de medidores para esta faixa de variação. Contudo, se usarmos a escala logarítmica consegue-se comprimir a escala. Para isto, basta calcularmos o logaritmo da relação, ou seja:

$$Log(RP) = \frac{P_{out}}{P_{in}} \qquad (\text{I.7})$$

Quando $P_{out}$ for menor que $P_{in}$ , o resultado numérico da relação de potências será menor que a unidade e o logaritmo de RP será negativo. Por outro lado, se $P_{out}$ for maior que $P_{in}$ , o resultado numérico da relação de potência será maior que a unidade e, portanto, logaritmo de RP será positivo. Resumindo, tem-se:

- Se $P_{out} < P_{in}$ , $Log \dfrac{P_{out}}{P_{in}}$ *será negativo indicando que houve uma atenuação.*

- Se $P_{out} > P_{in}$ , $Log \dfrac{P_{out}}{P_{in}}$ *será positivo indicando que houve um ganho.*

### I.2.6.2. Adotando Uma Referência Fixa ( Picowatt e miliwatt )

O decibel ( próximo item ) expressa a razão entre duas potências numa escala logarítmica sem adotar nenhuma referência fixa. Porém, uma potência P qualquer pode ser comparada a um valor de referência fixo. O valor de referência pode ser o mais variado possível, de acordo com o propósito a que se destina, como por exemplo: para transmissão de energia elétrica adota-se 1 Kw, enquanto que para acústica é usada $10^{-6}$ w ; em telecomunicações a potência de referência mais usada é 1 mw. Vejamos:

$$G(dB) = 10 \text{ x } Log \frac{P_q}{P_{q-1}} \qquad (\text{I.8})$$

Se fizermos $P_{q-1}$ assumir um valor fixo, esta relação passa a indicar quantos decibéis a potência $P_q$ está abaixo ou acima da potência de referência $P_{q-1}$ ( figura 01 ).

- Miliwatt ( mW ) : 1 mW = $10^{-3}$ *W*
- Microwatt ( μW ) : 1 μW = $10^{-6}$ *W*
- Picowatt ( pW ) : 1 pW = $10^{-12}$ *W*

### I.2.6.3. Decibel

Na prática esta unidade tem valores muito grandes, portanto passou-se a adotar o valor do decibel (dB) como unidade de medição de ganho e atenuação ou relação de corrente ou tensão.

Antigamente, utilizava-se para transmissão telefônica e transmissão de rádio por linhas uma unidade de medida chamada de milha de perda. Esse termo expressava a perda de potência em uma milha de cabo telefônico padrão. Mais tarde este termo foi substituído por um termo logarítmo que é o seguinte:

$$Log = \frac{P_{out}}{P_{in}} \qquad ( I.9 )$$

onde;

- $P_{out}$ é a potência na saída de um determinado comprimento de cabo.
- $P_{in}$ é a potência na entrada do mesmo cabo.

Como o cabo introduz perdas, temos que $P_{out}$ é menor que $P_{in}$ e, portanto, a relação $P_{out}$ / $P_{in}$ representa uma atenuação. Essa relação logarítmica de perda de potência representa o que antes era chamado de unidade de transmissão. Nesta época foi realizado um acordo entre radiodifusão e industriais do ramo telefônico no sentido de definir tal relação de potência como 10(dez), e essa quantidade recebeu o nome de Bell em homenagem a Alexander Grahan Bell, o inventor do telefone.

$$\text{Se } \frac{P_{out}}{P_{in}} = 10 \ ; \ então \ \ Log = \frac{P_{out}}{P_{in}} = 1 \text{ Bell} \qquad ( I.10 )$$

Porém, ficou comprovado que o Bell era muito grande como unidade de medida e, então, ela foi dividida por 10 ficando assim conhecida como **decibel**, ou seja, um décimo do Bell cuja notação é dB. Sendo assim, teremos:

$$\text{dB} = 10 \text{ x } \ Log = \frac{P_{out}}{P_{in}} \qquad ( I.11 )$$

As vantagens de se expressar ganho ou atenuação em dB são as seguintes;

O cálculo da amplificação total ( ou atenuação ) de quadripolos em série passa a ser uma soma em dB, ao invés de uma multiplicação de relações de potência. Assim, de volta a figura 2 teremos:

$$RP_{total} = \frac{P_n}{P_0} = \frac{P_1}{P_0} x \frac{P_2}{P_1} x \frac{P_3}{P_2} x ... x \frac{P_n}{P_{n-1}} \qquad ( I.12 )$$

ou seja:

$$RP_{total} = G_1.\text{x}.G_2.\text{x}.G_3.\text{x}.G_4.\text{x}...\text{x}.G_n \qquad ( I.13 )$$

Se tomarmos 10 x *Log* de ambos os termos da equação acima tem-se

$$10 \text{ x } \ log \text{G}_{total} = 10 \text{ x } \ log \text{G}_1 + 10 \text{ x } \ log \text{G}_2 + 10 \text{ x } \ log \text{G}_3 + ...... + 10 \text{ x } \ log \text{G}_n \qquad ( I.14 )$$

$$\text{G}_{total} = \text{G}_1(\text{dB}) + \text{G}_2(\text{dB}) + \text{G}_3(\text{dB}) + .... + \text{G}_n(\text{dB}) \qquad ( I.15 )$$

Relação de potências muito grandes passam a ser pequenos valores em dB. Assim:

$$G = \frac{1.000.000}{1} = 1.000.000 \qquad (\text{I.16})$$

em decibel:

$$G(dB) = 10 \text{ x } Log\frac{1.000.000}{1} = 60 \text{ dB} \qquad (\text{I.17})$$

### I.2.6.4. dBm ( Decibel em relação a 1 mw )

Esta unidade, abreviada por dBm, é utilizada para se indicar a relação entre duas potências P1 e P2, quando se estabelece, como referência, P2 = 1 mw. Desta forma, desde que fixamos a referência em 1 mw, o dBm é uma medida absoluta de potência, diferente do dB que é uma unidade de medida relativa. Caso a referência seja fixada em 1 W, ao invés de 1 mw, temos a unidade conhecida por dBw.

Desta maneira se fizermos com que a equação $P_{q-1}$ assuma um valor fixo e igual a 1 mw teremos a unidade dBm e a equação I.1 passa a ter a forma:

$$\text{dBm} = 10 \text{ x } Log = \frac{P_q}{1mW} \qquad (\text{I.18})$$

Esta relação nos informa quantos dB's abaixo ou acima de 1mW está a potência $P_q$

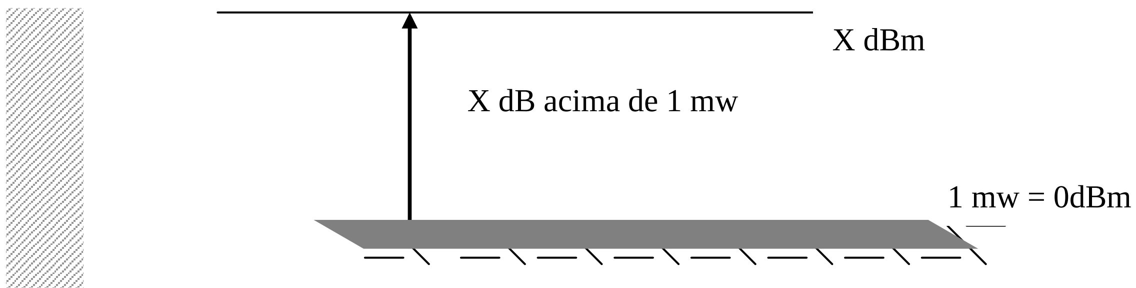



Figura 04

- Dada uma certa potência absoluta, expressa em dBm, a soma ( ou subtração ) de um valor em dB significa, em escala linear, a multiplicação ( ou divisão ) da potência pelo fator correspondente. O resultado é uma nova potência absoluta, devendo portanto ser expresso em dBm.

### I.2.6.5. dBr

Esta unidade é usada para referir o nível de um sinal em qualquer ponto de um sistema de transmissão com relação a um ponto arbitrário do sistema chamado ponto de nível relativo zero. O dBr difere do dB pois, enquanto esta última é usado para indicar atenuação ou ganho de um

quadripolo sem adotar um valor de referência, o dBr é utilizado para expressar a amplificação ou atenuação total que existe entre pontos arbitrários e um ponto de referência qualquer escolhido num sistema de transmissão.
A figura abaixo representa o nível relativo de uma linha de transmissão imaginária, na qual B é o ponto de referência de nível relativo zero.

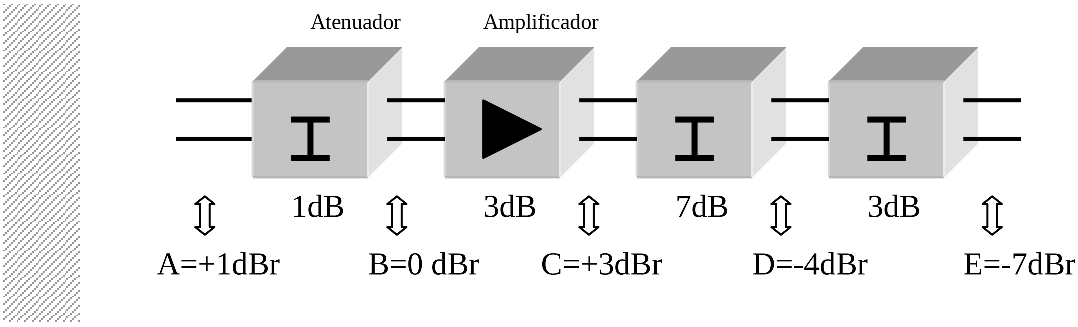



Figura 05

É importante ressaltar que o ponto de nível relativo zero não indica obrigatoriamente um ponto físico no sistema de transmissão, podendo ser um ponto hipotético.

### I.2.6.6. dBk

Tomando como base a equação 01 e, fazendo com que $P_{q-1}$ assuma o valor de 1Kw, teremos a unidade dBk. Então a equação passa a ter a forma.

$$\text{dBk} = 10 \text{ x } log \frac{P_q}{1Kw} \qquad \text{( I.19 )}$$

Esta relação nos informa quantos dB's abaixo ou acima de 1 Kw está a potência $P_{q.}$

### I.2.6.7. dBw

Para termos a unidade dBw devemos fazer com que a referência seja fixa e igual a 1w, ou seja, $P_{q-1}$ = 1w. Então a equação passa a ter a forma:

$$\text{dBw} = 10 \text{ x } log \frac{P_q}{1w} \qquad \text{(I.20 )}$$

Esta relação nos informa quantos dB's abaixo ou acima de 1w está a potência $P_{q.}$

### I.2.6.8. dBu

Para melhor entendermos o dBu devemos retomar a equação que definimos no cálculo de dB.

$$G(\text{dB}) = 10 \text{ x } log \frac{P_q}{P_{q-1}} \tag{I.21}$$

Se quisermos efetuar medidas de nível de tensão usando o mesmo procedimento de medida de nível de potência, basta substituirmos P por $E^2/Z$. Então, teremos:

$$G = 10 \times log \frac{\frac{U_q^2}{Z_q}}{\frac{U_{q-1}^2}{Z_{q-1}}} = 10 \times log \left( \frac{U_q^2}{Z_q} \times \frac{Z_{q-1}}{U_{q-1}^2} \right) \tag{I.22}$$

Da propriedade dos logaritmos sabemos que:

$$Log\,(\text{A} \times \text{B}) = Log\ \text{A} + Log\ \text{B} \tag{I.23}$$

Portanto:

$$G = 20 \times Log \frac{U_q}{U_{q-1}} + 10 \times Log \frac{Z_{q-1}}{Z_q} \tag{I.24}$$

Neste caso ao invés de fixarmos um valor de potência como referência, fixamos a tensão U e a impedância Z como valores de referência. O valor da tensão pode ser obtida aplicando-se, por conveniência, 1 mw sobre uma impedância de 600Ω ( impedância padrão para circuito de voz).

$$U^2 = P \text{ x } Z \rightarrow U = \sqrt{600 \times 1 \times 10^{-3}} \tag{I.25}$$
$$U = 0{,}775 \text{ (v)}$$

Substituindo os valores de U = 0,775 e Z = 600Ω na equação I.2, teremos:

$$G = 20 \times Log\,\frac{U}{0{,}775} + 10 \times Log\,\frac{600}{Z} \qquad (\text{ I.26 })$$

Esta equação nos dá uma potência em dBm relativa a um ponto cuja a tensão é de 0,775 (v), aplicada sobre uma impedância de 600Ω. Também, tem-se nesta expressão dois termos:

- O termo $20 \times Log\,U/0{,}775$ é por definição chamado de dBu e, indica quantos dB's uma determinada tensão está acima ou abaixo de 0,775 (v).
- O termo $10 \times Log\,600/Z$ é um fator de correção (K) caso a impedância do ponto em questão não seja igual a 600Ω.

Analisando a equação de definição do dBu notamos que existe a possibilidade de obtermos a potência em um determinado ponto medindo-se a tensão. Este procedimento será bastante usado, pois é muito mais viável técnica e economicamente a medida de tensão do que a potência. Na prática alguns cuidados devem ser tomados, para que a medida de potência através da tensão seja correta.

1. Impedância do ponto medido igual a 600Ω
   Na equação do dBu vimos que, com impedância do ponto medido igual a 600Ω a medida de potência é igual a de tensão permitindo a leitura direta do valor da potência.

2. Impedância do ponto medido diferente de 600Ω
   Quando isto ocorrer, para sabermos o valor de potência é necessário saber o valor da impedância do ponto e adicionar ao valor de tensão indicado pelo medidor o fator K.

$$K = 10 \times Log\,\frac{600}{Z} \qquad (\text{ I.27 })$$

Nesta tabela abaixo temos valores de K para as impedâncias mais comuns encontradas na prática:

| **Z(Ω)** | **600** | **300** | **150** | **75** | **60** |
|---|---|---|---|---|---|
| **K(dBm)** | 0 | 3 | 6 | 9 | 10 |

### I.2.6.9. dBm0

A unidade dBm0 nos mostra quantos db's abaixo ou acima a potência do ponto que foi escolhido como ponto de nível relativo zero (0 dBr ) está da potência de 1 mw. A potência em dBm0 pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\text{dBm} - \text{dBr} = \text{dBm0} \qquad (\text{ I.28 })$$

### I.2.6.10. Adotando Outros Tipos de Referências

Vimos que muitas vezes calculamos o ganho ( ou atenuação ) de um circuito ou sistema levando em consideração um nível de tensão, corrente ou potência, como referência fixa. Porém, pode-se adotar uma referência que não seja um nível de tensão, corrente ou potência, mas, por exemplo: uma antena, uma portadora, etc...

#### I.2.6.10.1. dBc

O dBc é uma unidade que nos informa quantos dB's um determinado sinal ( ou nível) está acima ou abaixo de uma portadora de referência.

#### I.2.6.10.2. dBd

Esta unidade nos informa quantos dB's o ganho de uma antena qualquer é maior ou menor que o ganho de um dipolo.

#### I.2.6.10.3. dBi

Esta unidade nos informa quantos dB's o ganho de uma antena qualquer é maior ou menor que o ganho de uma antena isotrópica. A antena isotrópica é aquela que irradia a mesma densidade de potência em todas as direções, ou seja, no plano cartesiano, seu diagrama de irradiação é uma circunferência.

**Prof. Leonardo Luciano de Almeida Maia**
**Departamento de Telecomunicações – DTE**