

Capítulo 4

Análise do Comportamento Não Linear do *Transponder* de Satélite, como Repetidor de Sinais de Rádio Freqüência

4.1. Introdução

O planejamento de um enlace via satélite deve levar em consideração tanto as relações portadora/ruído dos enlaces de subida e descida, como também as características de não linearidade dos *transponders*.

A não linearidade de um *transponder* via satélite pode inviabilizar por completo um enlace, pois, dependendo da condição de operação, os produtos de intermodulação podem atingir valores elevados.

Esta análise em satélite é de grande importância, pois como as distâncias envolvidas são muito grandes, as potências necessárias nos *links* devem ser maiores que as utilizadas em enlaces terrestres de microondas.

Em contrapartida, existe limitação de potência por parte das estações orbitais. Além de não contar com uma grande capacidade de fornecimento de energia, os satélites devem operar com *transponders* de alta eficiência, para minimizar os efeitos da dissipação de potência em órbita e para não onerar o tamanho da estrutura física, o que dificultaria o processo de lançamento.

Todas estas características fazem com que o satélite tenha seu desenvolvimento baseado em operações com níveis de potência iguais ao máximo admitido na condição de saturação. Esta exigência deixa de ser atendida, à medida que a forma de utilização do *transponder* contemple diferentes categorias de usuários e diferentes formas de múltiplos acessos.

No Capítulo 3 foram discutidas várias formas de multiacessar o satélite e aquela que permite explorar ao máximo a potência do satélite é a *TDMA*, pois emprega apenas uma portadora no *transponder*. Aliada às modulações baseadas em fase e frequência, este tipo de configuração nada sofre com produtos de intermodulação, permitindo que se opere na saturação. No entanto, são poucos os usuários que possuem tráfego que justifique uma única portadora operando em *TDMA*, em função da alta taxa de comunicação permitida por esta configuração.

Como o mais comum é dividir a banda total do *transponder* do satélite em sub-bandas e estas serem disponibilizadas a diferentes usuários, tem-se como principal forma de múltiplo acesso o *FDMA* que, com múltiplas portadoras será altamente impactado pela não linearidade oferecida pelos *transponders*, exigindo que no planejamento do enlace esta condição seja levada em consideração.

Os amplificadores empregados nos *transponders* são denominados *TWTA* (*Travelling Wave Tubes Amplifiers*) ou *SSPA* (*Solid State Power Amplifiers*). Os amplificadores *TWTA* utilizam as válvulas de onda caminhante (*TWT*), enquanto os *SSPA* empregam transistores *FET*. Estas tecnologias estão presentes nos satélites em função da época em que foram lançados, da banda de frequências em que operam e da potência de transmissão.

Atualmente, as tecnologias para construção de amplificadores em microondas são sempre atreladas aos componentes de estado sólido, pelo fato de os mesmos apresentarem maiores eficiências, menor custo, maior facilidade de operação, maior durabilidade e menores dimensões, se comparados com as válvulas amplificadoras. Ainda existe a limitação de potência dos componentes de estado sólido, comparados com as válvulas, principalmente nas bandas *K*, *Ku* e *Ka*.

4.2. Representação da função de transferência dos *transponders*, através das séries de Taylor

Existem várias formas de representar a não linearidade oferecida por um *transponder*, cabendo aqui destacar: as séries de Taylor, as funções de Saleh, o modelo de Blum e Jeruchim, ou ainda as séries de Volterra. No entanto, este trabalho utiliza a série de Taylor para a representação do *transponder*, pois as válvulas *TWT* e os transistores com tecnologia *FET* apresentam distorções com predominância nos termos de terceira ordem, permitindo que a série seja truncada e oferecendo, com isso, poucos termos da série numérica¹. Estas características serão discutidos ao longo deste capítulo.

4.2.1. Função característica de transferência do *transponder*

Um amplificador ideal apresenta uma função de transferência de comportamento linear que pode ser descrita pela equação (4.1).

$$V_{out}(t) = K_1 \cdot V_{in}(t) \quad (4.1)$$

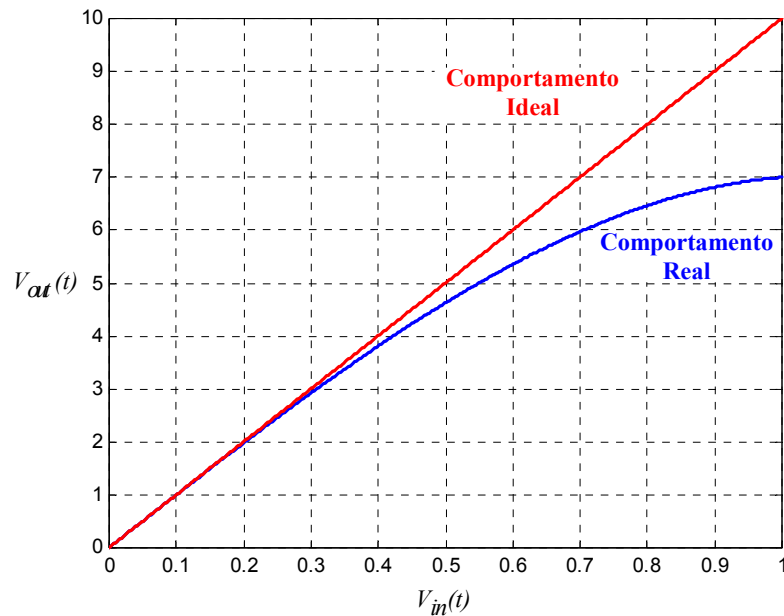


Figura 4.1. Função de transferência dos amplificadores na condição ideal e na condição real.

No entanto, na condição real de operação, a resposta de um amplificador é diferente, pois existe uma região não linear onde ocorre a saturação. Na condição de saturação, um incremento de nível de entrada não é agraciado com o mesmo ganho com que o sinal de entrada é amplificado na condição linear de operação. A Figura 4.1 apresenta duas curvas, com uma delas demonstrando o comportamento linear e a outra o comportamento real.

Através da Figura 4.1 pode-se perceber que a curva real possui um comportamento linear de sua origem até um determinado valor de $V_{in}(t)$, onde se inicia a região de saturação. A partir deste ponto, fica bastante notório o comportamento não linear. Para representar este comportamento de forma mais próxima possível da realidade, será utilizada a série de Taylor, como enunciado na equação (4.2)¹.

$$V_{out}(t) = \sum_{j=1}^N K_n V_{in}^j(t) \quad (4.2)$$

A equação (4.2) escrita sem a representação de somatório, pode ser visualizada na equação (4.3), na forma:

$$V_{out}(t) = K_1 V_{in}(t) + K_2 V_{in}^2(t) + K_3 V_{in}^3(t) + K_4 V_{in}^4(t) + \dots + K_n V_{in}^N(t) \quad (4.3)$$

Esta série pode ser truncada, pois para uma representação real, são necessários apenas alguns termos da aproximação, sendo que, com muitos casos, é suficiente considerar até o termo de sétima ordem. Existem casos em que os amplificadores podem ser representados com apenas dois ou três termos.

A equação (4.3) demonstra que na saída do amplificador, existirá um sinal proveniente da influência dos termos quadrático, cúbico e de demais ordens. Esta condição é responsável pela geração de distorções de amplitude nos domínios da frequência, assim como provoca alterações na fase.

4.2.2. Análise do comportamento quadrático

Para analisar a aproximação quadrática será utilizada a função de transferência apresentada na equação (4.4):

$$V_{out}(t) = K_1 V_{in}(t) + K_2 V_{in}^2(t) \quad (4.4)$$

Aplicando-se um sinal de entrada cossenoidal com amplitude A_I e frequência angular ω_I , tem-se, na saída da estrutura, o sinal representado pela equação (4.5).

$$V_{out}(t) = K_1 A_I \cos \omega_1 t + \frac{K_2 A_I^2}{2} + \frac{K_2 A_I^2}{2} \cos(2\omega_1 t) \quad (4.5)$$

O sinal de saída é composto por três termos, sendo o primeiro termo resultado do ganho linear e que reproduz o sinal de entrada com ganho K_I e os segundo e terceiro termos representam distorções. O segundo termo é uma componente *DC* enquanto que o terceiro termo faz o papel da segunda componente harmônica².

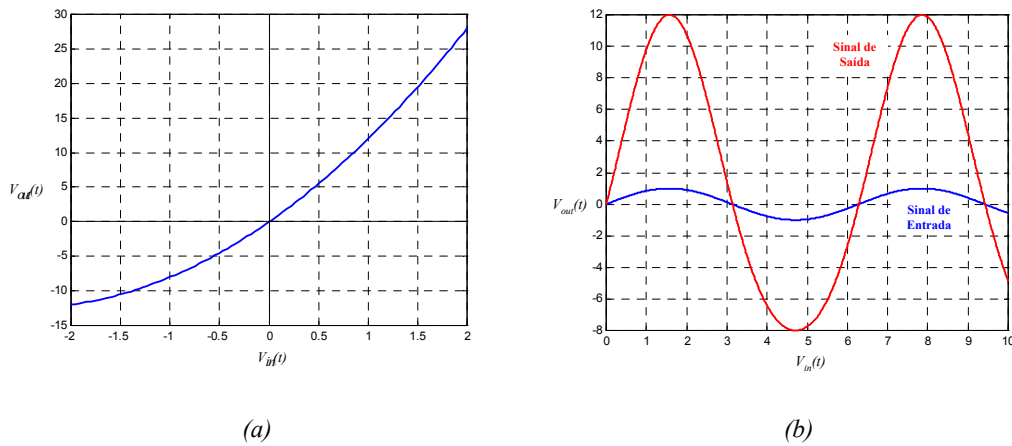


Figura 4.2. (a) Função de transferência com comportamento quadrático; (b) Formas de onda de entrada e saída no domínio do tempo.

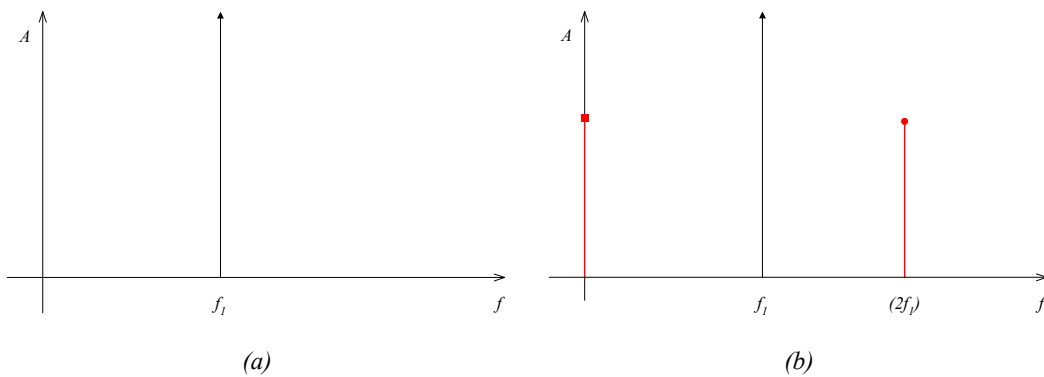


Figura 4.3. (a) Espectro de frequência na entrada; (b) Espectro de frequência na saída.

A Figura 4.2 (a) apresenta a função de transferência da equação (4.4), onde é possível notar o comportamento não linear. A Figura 4.2 (b) apresenta a forma de

onda dos sinais de entrada e saída, enquanto que as Figuras 4.3 (a) e (b) as componentes dos sinais de entrada e saída no domínio da frequência, respectivamente. Neste caso é bastante notório as distorções geradas pela não linearidade, resultando na degradação do sinal..

Existem vários parâmetros que definem a linearidade de um amplificador, sendo um deles o ponto de interseção de segunda ordem. O ponto de interseção de segunda ordem é definido pelo valor de tensão na entrada ou na saída em que a componente do segundo harmônico assume amplitude igual à da portadora fundamental. Através da equação (4.5) pode-se afirmar que o ponto de interseção de segunda ordem pode ser calculado para o valor de A_1 em que o primeiro termo assume a mesma amplitude máxima que o terceiro termo, ou seja a segunda harmônica com a mesma amplitude que a fundamental. Esta condição pode ser visualizada através da Figura 4.4.

$$K_1 A_1 = \frac{K_2 A_1^2}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{2 \cdot K_1}{K_2} \quad (4.6)$$

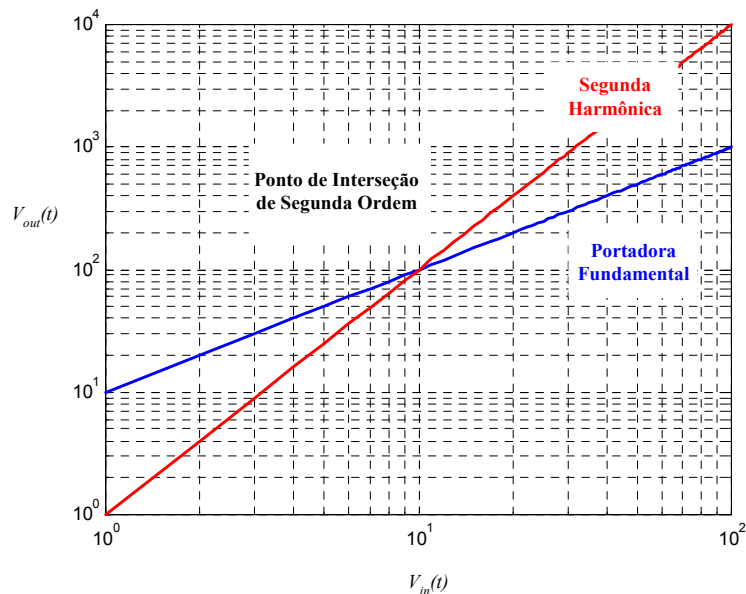


Figura 4.4. Ponto de interseção de segunda ordem em uma estrutura não linear.

A equação (4.6) demonstra qual é a condição fixada entre as amplitudes do sinal na entrada e na saída do amplificador que leva ao ponto de interseção de segunda ordem.

4.2.3. Análise do comportamento cúbico

Na série de Taylor, a componente cúbica é de grande relevância, como será apresentado para sinais com número de portadora $N > 1^3$. No entanto, este estudo inicial permitirá analisar o ponto de interseção de terceira ordem. Inicialmente, será utilizada a equação (4.7) para representação de um amplificador com distorções de terceira ordem.

$$V_{out}(t) = K_1 V_{in}(t) + K_3 V_{in}^3(t) \quad (4.7)$$

Aplicando-se um sinal de entrada cossenoidal com amplitude A_I e frequência angular ω_I , tem-se, na saída da estrutura eletrônica, o sinal representado pela equação (4.8).

$$V_{out}(t) = K_1 A_I \cos \omega_I t + \frac{3}{4} K_3 A_I^3 \cos(\omega_I t) + \frac{1}{4} K_3 A_I^3 \cos(3\omega_I t) \quad (4.8)$$

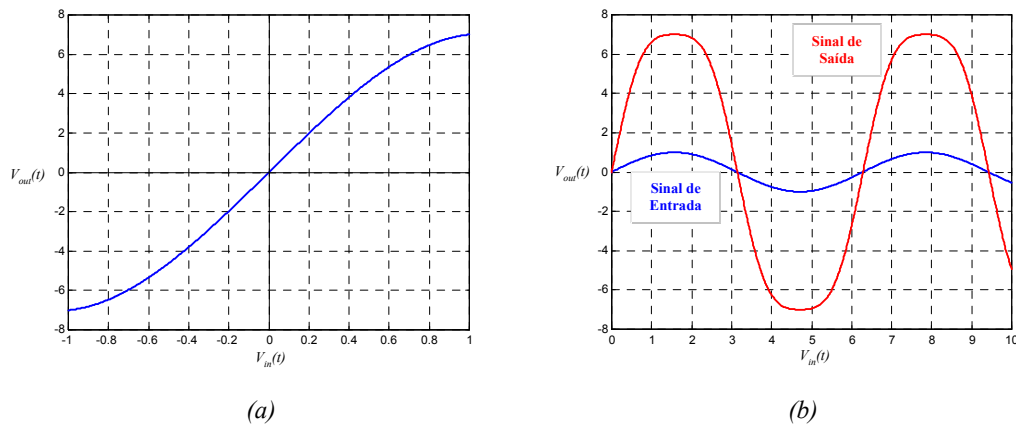


Figura 4.5. (a) Função de transferência com comportamento cúbico; (b) Formas de onda de entrada e saída no domínio do tempo.

A função característica representada pela equação (4.8) pode ser visualizada, graficamente, através da Figura 4.5 (a) e os sinais no domínio do tempo da entrada e da saída do amplificador são apresentados na Figura 4.5 (b).

A Figura 4.5 (a) foi traçada, considerando-se o ganho de terceira ordem negativo, como realmente ocorre nos amplificadores de *RF*. Conseqüentemente, a função característica demonstra uma compressão de ganho à medida que a tensão de entrada aumenta. Este efeito pode ser visualizado no domínio do tempo, através da forma de onda de saída que apresenta uma cossenóide distorcida em seus picos, na Figura 4.5 (b). Além desta linha de raciocínio, pode-se realizar a análise deste efeito, através da equação que representa a função de transferência.

O segundo termo da equação (4.8) é uma componente na mesma freqüência da fundamental, mas com amplitude negativa, pois nos amplificadores tem-se ($-K_3$). Sendo assim, esta parcela reduzirá a amplitude da fundamental, justificando, desta forma, a compressão de ganho que depende da amplitude da portadora.

A Figura 4.6 (a) e (b) demonstra o espectro de freqüência na saída, com o produto de intermodulação de terceira ordem, tendo sido aplicado na entrada um sinal cossenoidal puro.

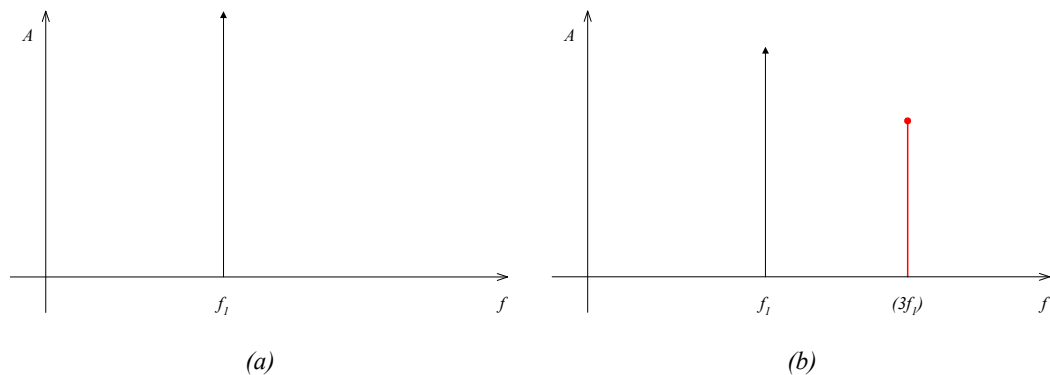


Figura 4.6. (a) Espectro de freqüências na entrada; (b) Espectro de freqüências na saída.

Outro parâmetro que permite medir a linearidade é o ponto de interseção de terceira ordem, definido como sendo o valor de tensão, na entrada ou na saída, em que a amplitude da terceira harmônica é igual à amplitude da fundamental. Esta condição pode ser visualizada na Figura 4.7⁴.

Os pontos de interseção de segunda ordem e de terceira ordem são de grande valia na determinação dos produtos de intermodulação, mas, infelizmente, não são apresentados pelos operadores de satélites, para descrição dos *transponders*. No entanto, os amplificadores empregados para estações de *up-link* são especificados com estes parâmetros. Embora não ocorra em grande escala, algumas estações utilizam um único *HPA* para amplificar várias portadoras, simultaneamente; condição esta onde a análise de intermodulação se faz de grande importância. Em muitos casos, esta prática demanda o uso de sistemas pré corretores de intermodulação, no intuito de otimizar a utilização dos amplificadores.

Como este trabalho se destina a analisar a degeneração da relação portadora/ruído, em função da presença dos produtos de intermodulação, esta abordagem ficará como sugestão para outros trabalhos nesta área.

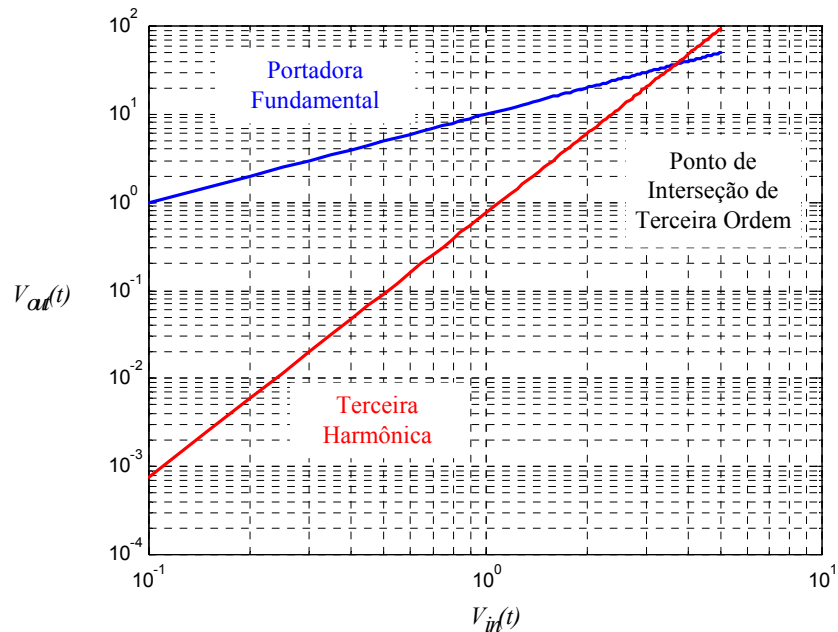


Figura 4.7. Ponto de interseção de terceira ordem em uma estrutura não linear.

4.2.4. Ponto de Compressão de 1dB

O ponto de compressão de 1dB é definido como sendo a tensão, na entrada ou saída, em que a curva real, com comportamento não linear, está 1dB abaixo da curva

considerada ideal (termo linear da função de transferência). Matematicamente, o valor de $1dB$ é encontrado, impondo-se a condição apresentada na equação (4.9).

$$\frac{K_1 V_{in}(t)}{K_1 V_{in}(t) + K_2 V_{in}^2(t) + K_3 V_{in}^3(t) + K_4 V_{in}^4(t) + \dots + K_n V_{in}^N(t)} = 1 (dB) \quad (4.9)$$

O ponto de compressão de $1dB$ varia de acordo com a série que representa o amplificador analisado e com o número e amplitude das portadoras. Por este motivo, a ferramenta computacional que será abordada no Capítulo 6 realiza o cálculo do ponto de compressão de $1dB$ em função da comparação direta de valores entre a curva ideal e a curva real. Este roteiro numérico garante a obtenção dos valores com precisão, sem o desenvolvimento de equações matemáticas complexas.

A Figura 4.8 apresenta o ponto de compressão de $1dB$ na função de transferência de um dado amplificador. O ponto de compressão de $1dB$ é empregado em um grande número de sistemas, para definir a máxima potência de operação, ou ainda a potência de saturação. Nos satélites, a operação em máxima potência ocorre, normalmente, acima do ponto de $1dB$, com valores que podem variar de $4dB$ a $6dB$, no intuito de que seja obtido o máximo desempenho da estrutura⁵.

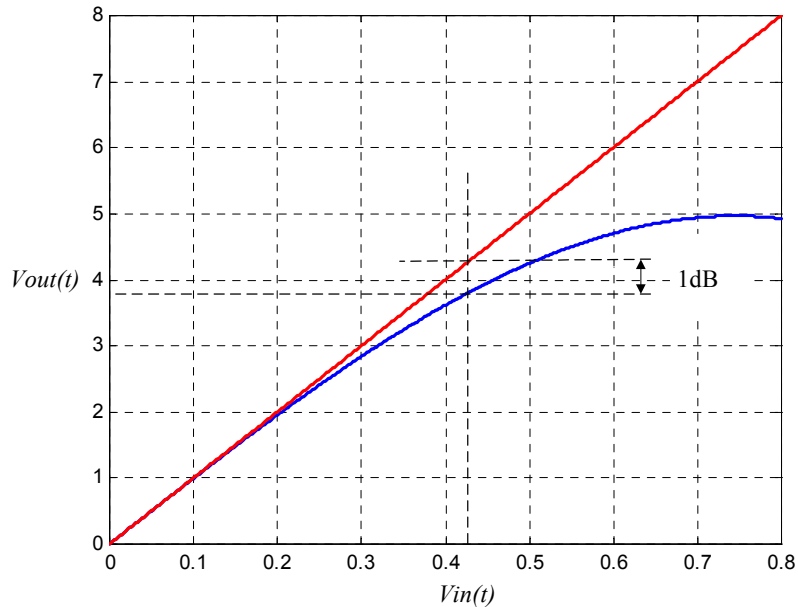


Figura 4.8. Curva de um dado amplificador com a indicação do ponto de compressão de $1dB$.

4.2.5. Produtos de intermodulação de ordens elevadas

Um teste de grande importância para amplificadores é o teste com o sinal de dois tons, pois permite identificar e medir com facilidade os produtos de intermodulação das mais diferentes ordens. Além disso, o sinal de dois tons submete os amplificadores a uma grande variação no seu envelope, fazendo com que a função característica de transferência seja explorada ao longo de toda sua extensão. A Figura 4.9 (a) e (b) apresenta o sinal de dois tons no domínio do tempo e da frequência, respectivamente.

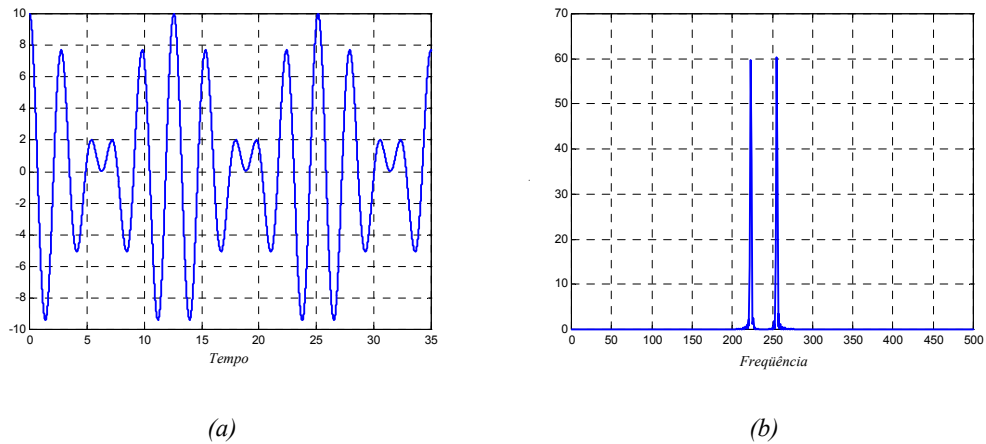


Figura 4.9. Sinal de dois tons: (a) No domínio do tempo; (b) No domínio da frequência.

Com o sinal de dois tons aplicado a um amplificador é possível visualizar tanto os produtos harmônicos como os produtos de intermodulação das mais diversas ordens, dependendo do desempenho do equipamento que está sendo testado. O sinal de dois tons aplicado a um amplificador não linear apresentará, em sua saída, o sinal descrito pela equação (4.10) truncada no termo de terceira ordem. O sinal de dois tons será composto por duas cossenóides com amplitudes A_1 e A_2 e frequências angulares ω_1 e ω_2 , respectivamente.

Na Figura 4.10 está todo o possível espectro na saída do amplificador, com componentes de intermodulação de ordem ímpar e par até a sétima ordem. Alguns pontos importantes podem ser visualizados neste espectro de frequências.

$$\begin{aligned}
V_{out}(t) = & \frac{K_2 A_1^2}{2} + \frac{K_2 A_2^2}{2} + && \text{Componente DC} \\
& + K_2 A_1 A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2) \cdot t && 2^{\text{a}} \text{ Ordem} \\
& - \frac{3}{4} K_3 A_1^2 A_2 \cos(2\omega_1 - \omega_2) \cdot t + && 3^{\text{a}} \text{ Ordem} \\
& + K_1 A_1 \cos \omega_1 t + && \text{Fundamental} \\
& - \frac{3}{4} K_3 A_1^3 \cos \omega_1 t + && 3^{\text{a}} \text{ Ordem}^1 \\
& - \frac{6}{4} K_3 A_1 A_2^2 \cos \omega_1 t + && 3^{\text{a}} \text{ Ordem}^1 \\
& + K_1 A_2 \cos \omega_2 t + && \text{Fundamental} \\
& - \frac{3}{4} K_3 A_2^3 \cos \omega_2 t + && 3^{\text{a}} \text{ Ordem}^1 \\
& - \frac{6}{4} K_3 A_1^2 A_2 \cos \omega_2 t + && 3^{\text{a}} \text{ Ordem}^1 \\
& - \frac{3}{4} K_3 A_1 A_2^2 \cos(2\omega_2 - \omega_1) \cdot t + && 3^{\text{a}} \text{ Ordem} \\
& + \frac{1}{2} K_2 A_1^2 \cos(2\omega_1) \cdot t + && 2^{\text{a}} \text{ Ordem} \\
& + K_2 A_1 A_2 \cos(\omega_1 + \omega_2) \cdot t + && 2^{\text{a}} \text{ Ordem} \\
& + \frac{1}{2} K_2 A_2^2 \cos(2\omega_2) \cdot t + && 2^{\text{a}} \text{ Ordem} \\
& - \frac{1}{4} K_3 A_1^3 \cos(3\omega_1) \cdot t + && 3^{\text{a}} \text{ Ordem} \\
& - \frac{3}{4} K_3 A_1^2 A_2 \cos(2\omega_1 + \omega_2) \cdot t + && 3^{\text{a}} \text{ Ordem} \\
& - \frac{3}{4} K_3 A_1 A_2^2 \cos(2\omega_2 + \omega_1) \cdot t + && 3^{\text{a}} \text{ Ordem} \\
& - \frac{1}{4} K_3 A_2^3 \cos(3\omega_2) \cdot t + \dots && 3^{\text{a}} \text{ Ordem}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

¹ Este produto está indicado como um produto de terceira ordem, pois é originado do termo cúbico da série de Taylor.

Inicialmente, vemos que existem regiões específicas do espectro, na saída do amplificador, que podem ser denominadas de zona *DC*, zona fundamental e zonas referentes a cada harmônica.

Na zona *DC* estão apenas os componentes de intermodulação resultantes dos termos de ordem par, ou seja, o termo *DC* e as intermodulações decorrentes das diferenças entre as componentes fundamentais.

Na zona de segunda harmônica ocorre o mesmo que na zona *DC*, existindo apenas as intermodulações com frequências resultantes da soma entre as fundamentais, resultantes dos termos de ordem par e as segundas harmônicas.

Estes termos pares são de pequena amplitude, devido à natureza dos componentes envolvidos e, além disso, ocorrem fora da zona fundamental, o que facilita sobremaneira a filtragem dos mesmos. Na realidade, esta eliminação é quase que natural em função dos circuitos de sintonia e casamento de impedâncias utilizados nos amplificadores *TWTA* e *SSPA*⁶.

Na zona da terceira harmônica estão os produtos de intermodulação de ordens ímpares, resultantes da soma. Esta região espectral também não é relevante, pelos mesmos motivos da zona de segunda harmônica.

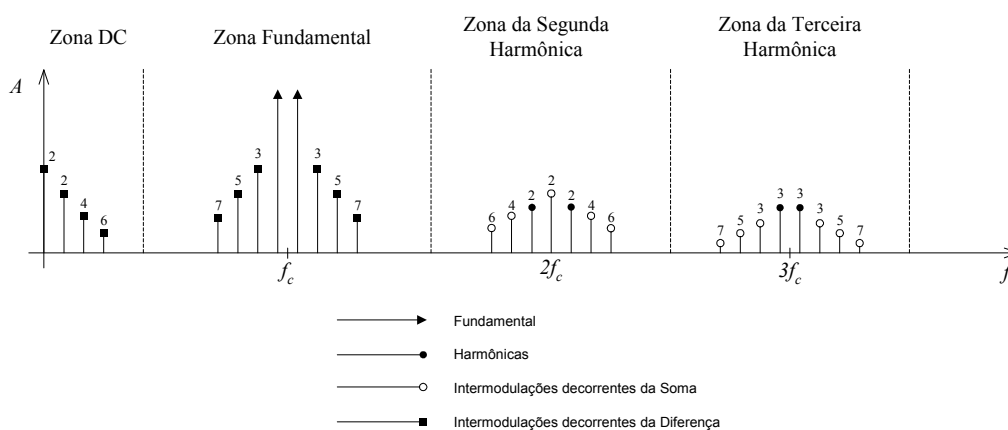


Figura 4.10. Resposta de frequência na saída de um amplificador no teste de dois tons, com todas as possibilidades de intermodulação.

A zona de maior importância é a zona fundamental, onde estão todas as frequências fundamentais e os produtos de intermodulação de ordem ímpar decorrentes

das subtrações entre as componentes fundamentais. Nesta região espectral, os produtos de intermodulação mais relevantes são os de terceira ordem, pois são os mais próximos das portadoras e os que oferecem maiores amplitudes.

Por esta razão, este trabalho irá considerar os produtos de terceira ordem para determinação da relação portadora/ruído de intermodulação, sem nenhum prejuízo da validade do cálculo, pois estes serão os produtos que realmente limitarão a utilização dos *transponders* em potências elevadas, com várias portadoras.

4.2.6. Conversões *AM-AM* e *AM-PM* em amplificadores não lineares

A não linearidade dos amplificadores afeta pontos de grande relevância na análise dos sinais que por eles trafegam.

Nos amplificadores uma variação de amplitude na entrada é transferida para saída, mas afetada pela função de transferência do amplificador. Este tipo de efeito é conhecido como conversão *AM-AM*, pois trata-se do efeito causado pelo amplificador, na conversão de amplitude de entrada para saída.

No entanto, a variação de amplitude na entrada do amplificador pode causar variações de fase do sinal de saída, ou seja, a modulação de amplitude contida no sinal de entrada pode resultar em uma modulação de fase do sinal de saída. Esta característica é denominada conversão *AM-PM*. A Figura 4.11 demonstra, de forma bastante resumida, a forma como estes dois efeitos podem se apresentar.

As conversões *AM-AM* e *AM-PM* são de grande importância na representação de todo amplificador. Considerando, na entrada, um sinal cossenoidal com amplitude A_1 , com frequência angular ω_1 e com fase inicial θ , tem-se, na saída do amplificador, um sinal afetado em amplitude e fase, como demonstrado pela equação (4.12)¹:

$$V_{in}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (4.11)$$

$$V_{out}(t) = f(A) \cos(\omega_1 t + \theta + g(A)) \quad (4.12)$$

onde: $f(A)$ descreve a conversão *AM-AM* da função característica não linear do amplificador e $g(A)$ descreve a conversão *AM-PM*.

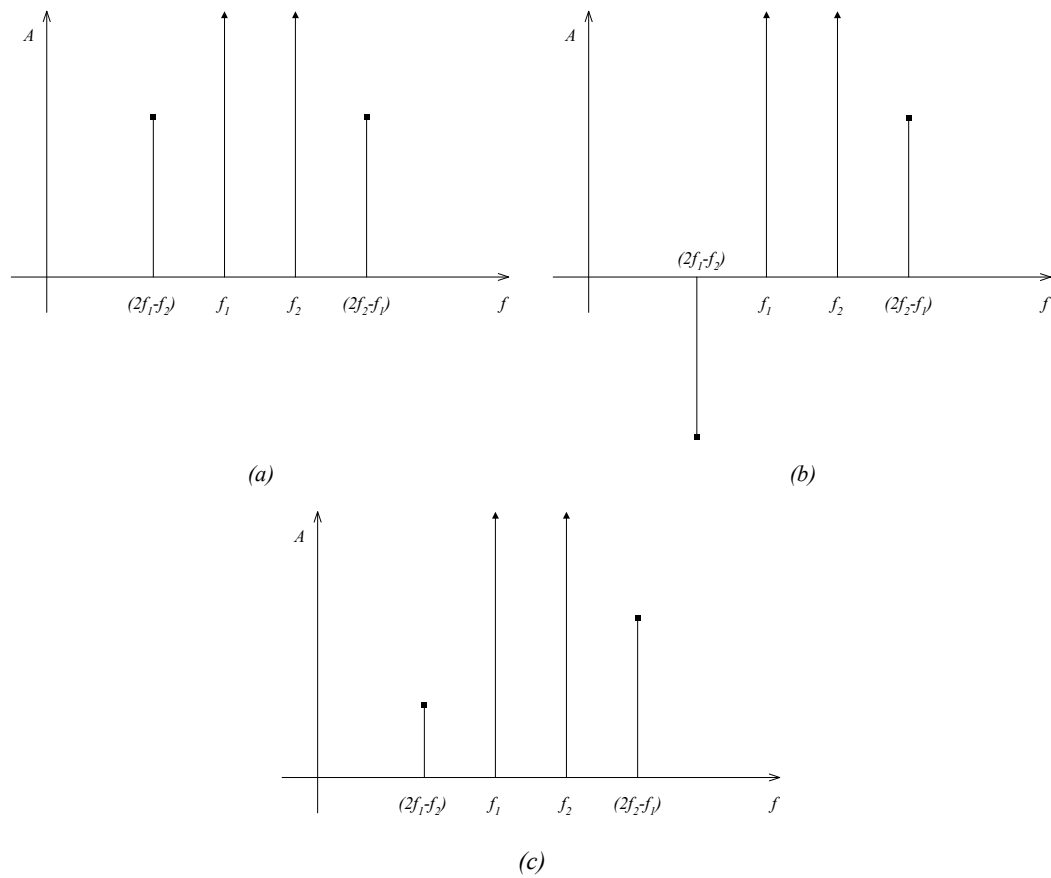


Figura 4.11. (a) Intermodulação proveniente de conversão AM-AM; (b) Intermodulação proveniente de conversão AM-PM; (c) Intermodulação resultante de conversões AM-AM e AM-PM simultâneas.

Esta análise pode ser estendida a sinais modulados como apresentado na equação (4.13):

$$V_{in}(t) = A_1(t) \cos[\omega_1 t + \theta(t)] \quad (4.13)$$

onde: $A(t)$ descreve o envelope modulado presente na portadora e $\theta(t)$ as variações de fase e, conseqüentemente, de frequência proporcionadas pela modulação. O sinal distorcido na saída é apresentado na equação (4.14).

$$V_{out}(t) = f(A(t)) \cos[\omega_1 t + \theta(t) + g(A(t))] \quad (4.14)$$

Para implementação de estruturas empregadas em pré-correção de intermodulações a análise de fase é de grande importância, pois o cancelamento dos produtos

de intermodulação só ocorre se forem alcançadas as fases conjugadas de cada produto que se deseja cancelar.

Como este trabalho tem a intenção de determinar apenas a relação portadora/ruído (*Carrier/Noise*) de intermodulação, será realizada apenas a análise em amplitude, no intuito de simplificar o desenvolvimento das equações.

4.3. Determinação dos níveis de intermodulação

Como comentado anteriormente, dado o uso relevante demandado em muitas aplicações tecnológicas atuais, serão considerados apenas os produtos de intermodulação de terceira ordem, por serem os mais importantes nos *TWTA* e *SSPA*. Além disso, os tópicos que serão trabalhados na sequência abordarão apenas os termos de amplitude.

4.3.1. Lema da não coincidência

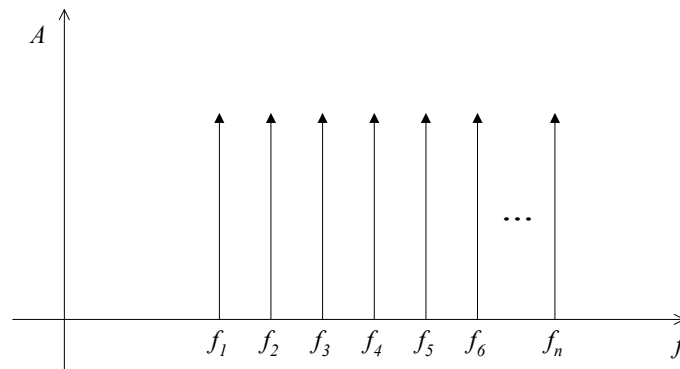
Antes de iniciar a análise de múltiplas portadoras trafegando pelos *transponders*, é importante considerar a forma de se realizar a disposição dos mesmos, ao longo do espectro útil do canal de satélite⁴.

A Figura 4.12 (a) apresenta n portadoras ocupando um determinado canal, com um distanciamento Δ_i entre cada uma delas. Estes sinais, ao trafegarem de forma simultânea por uma estrutura não linear, são afetados por produtos de intermodulação que estarão dispostos, ao longo do espectro de frequências, em função da posição de cada uma das componentes.

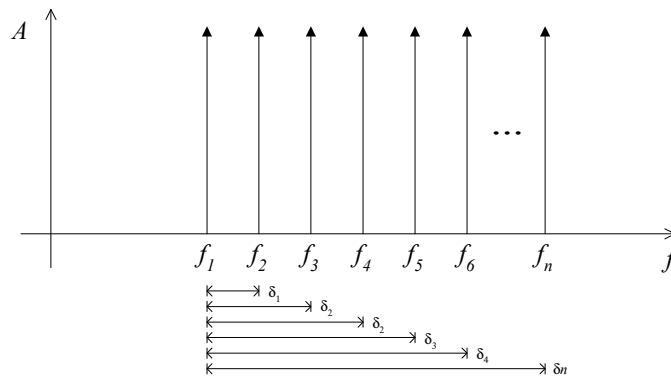
Analisando e simulando diferentes disposições espectrais para um número genérico de portadoras, é possível detectar que os produtos de intermodulação podem ser gerados em posições coincidentes, se o distanciamento entre as portadoras fundamentais forem sempre os mesmos.

Esta condição em muito prejudica o canal, pois provoca a redução da relação portadora/ruído de intermodulação. Para minimizar este efeito deve-se adotar distanciamentos diferentes entre as portadoras, como será enunciado no *Lema 1 – Não coincidência*:

Na Figura 4.12 (b) tem-se a indicação do distanciamento entre uma portadora de referência e as demais portadoras da banda, representado por δ_i . A não coincidência dos produtos de intermodulação em posições idênticas ao longo do espectro só é totalmente atendida se os valores de δ_i não forem múltiplos inteiros um dos outros.



(a)



(b)

Figura 4.12. Portadoras dispostas na banda de um canal multi-acessado.

Sem a pretensão inicial, neste estudo, de elaborar um resultado original na literatura, foram realizadas simulações e extensivos cálculos analíticos permitindo enunciar:

Lema 1 – Não Coincidência: Considere o tráfego de N portadoras múltiplas pelo transponder de um satélite. Seja $I = \{1, 2, 3, \dots, N\} \subset \mathbf{N}$ e f_i a frequência de cada por-

tadora, $i \in I$. Se $\Delta_i = f_{i+1} - f_i$, $i \in I - \{N\}$ é o espaçamento entre elas, então existe a não coincidência dos produtos de intermodulação se e somente se:

$$\Delta_i \neq \Delta_j \quad \forall \quad i \neq j \quad ; \quad i, j \in \{I\} \quad (4.15)$$

$$\frac{\Delta_i}{\Delta_j} = \alpha \quad ; \quad \alpha \notin \mathbf{N}^* \quad (4.16)$$

Demonstração:

Como verificações analíticas não são o alvo principal deste trabalho, a demonstração deste lema está feita em um caso particular, sem perdas de generalidades, no Apêndice C. ■

Nos próximos itens, levaremos em consideração o cálculo da relação portadora/ruído de intermodulação, nas condições extremas.

4.3.2. Produtos de intermodulação com duas portadoras

Através das equações (4.17) e (4.18) pode-se obter o sinal, na saída de um *transponder* de comportamento não linear, resultando na equação (4.19).

$$V_{in}(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t \quad (4.17)$$

$$V_{out}(t) = K_1 V_{in}(t) - K_3 V_{in}^3(t) \quad (4.18)^{II}$$

$$\begin{aligned} V_{out}(t) = & -\frac{3}{4} K_3 A_1^2 A_2 \cos(2\omega_1 - \omega_2) \cdot t + K_1 A_1 \cos \omega_1 t - \frac{3}{4} K_3 A_1^3 \cos \omega_1 t + \\ & -\frac{6}{4} K_3 A_1 A_2^2 \cos \omega_1 t + K_1 A_2 \cos \omega_2 t - \frac{3}{4} K_3 A_2^3 \cos \omega_2 t + \\ & -\frac{6}{4} K_3 A_1^2 A_2 \cos \omega_2 t - \frac{3}{4} K_3 A_1 A_2^2 \cos(2\omega_2 - \omega_1) \cdot t + \\ & -\frac{1}{4} K_3 A_1^3 \cos(3\omega_1) \cdot t - \frac{3}{4} K_3 A_1^2 A_2 \cos(2\omega_1 + \omega_2) \cdot t + \\ & -\frac{3}{4} K_3 A_1 A_2^2 \cos(2\omega_2 + \omega_1) \cdot t - \frac{1}{4} K_3 A_2^3 \cos(3\omega_2) \cdot t \end{aligned} \quad (4.19)$$

^{II} Este é um caso largamente apresentado nos estudos de não linearidade de canais em comunicações digitais, para uso em enlaces de rádio para comunicação de dados.

Os termos com freqüências em $3\omega_1$, $3\omega_2$, $(2\omega_1+\omega_2)$ e $(2\omega_2+\omega_1)$ fazem parte da zona de terceiro harmônico e, portanto, não serão levados em consideração para determinação da relação portadora/ruído de intermodulação.

Neste caso, deve ser considerado para o cálculo a relação de amplitudes do produto $(2\omega_1-\omega_2)$ ou $(2\omega_2-\omega_1)$, comparada com aquela de uma das portadoras envolvidas, resultando na equação (4.20), que estabelece a relação portadora/ruído de intermodulação, para este caso.

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} = \frac{\left|K_1 A_1 - \frac{3}{4} K_3 A_1^3 - \frac{6}{4} K_3 A_1 A_2^2\right|}{\left|\frac{3}{4} K_3 A_1^2 A_2\right|} \quad (4.20)$$

Na equação (4.20) foi feita a relação em módulo entre a amplitude da portadora de freqüência ω_1 com o produto de intermodulação com freqüência $(2\omega_1-\omega_2)$. O mesmo resultado seria obtido se o nível do produto de intermodulação com freqüência de $(2\omega_2+\omega_1)$ fosse comparado com a portadora com freqüência angular ω_2 , considerando portadoras fundamentais com a mesma amplitude. Caso as amplitudes das portadoras não sejam iguais à equação (4.20), considera-se que a portadora com freqüência angular ω_1 é a de maior amplitude. Acrescenta-se ainda que são considerados os produtos de intermodulação de maior amplitude que comparecem na banda vestigial da portadora em análise.

O numerador da equação (4.20) demonstra que a portadora comparece com nível reduzido em função de produtos com freqüência ω_1 gerados pelo termo não linear de terceira ordem. Esta condição retrata, matematicamente, a compressão de ganho das portadoras que trafegam pelo *transponder*. A equação ainda demonstra que a relação portadora/ruído será reduzida com o aumento da amplitude das portadoras.

Se as duas portadoras em questão operarem com a mesma amplitude, isto é: $A_1=A_2=A$, a equação (4.20) resultará na (4.21).

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} = \frac{\left|K_1 - \frac{9}{4} K_3 A^2\right|}{\left|\frac{3}{4} K_3 A^2\right|} \quad (4.21)$$

A relação (4.21) pode ser colocada em um contexto genérico o que será alvo de um outro resultado inédito da literatura a ser enunciado no *Lema 2*.

4.3.3. Produtos de intermodulação com três portadoras

Nesta condição, o sinal de entrada apresentado pela equação (4.22) será aplicado ao *transponder* com comportamento dado pela equação (4.18) e o sinal de saída tem a representação dada pela equação (4.23).

$$V_{in}(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t + A_3 \cos \omega_3 t \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} V_{out}(t) = & -\frac{3}{4} K_3 A_1^2 A_3 \cos(2\omega_1 - \omega_3) \cdot t - \frac{6}{4} K_3 A_1 A_2 A_3 \cos(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \cdot t + \\ & -\frac{3}{4} K_3 A_2^2 A_3 \cos(2\omega_2 - \omega_3) \cdot t - \frac{3}{4} K_3 A_1^2 A_2 \cos(2\omega_1 - \omega_2) \cdot t + \\ & + K_1 A_1 \cos \omega_1 t - \frac{3}{4} K_3 A_1^3 \cos \omega_1 t - \frac{6}{4} K_3 A_1 A_2^2 \cos \omega_1 t + \\ & -\frac{6}{4} K_3 A_1 A_3^2 \cos \omega_1 t + K_1 A_2 \cos \omega_2 t - \frac{3}{4} K_3 A_2^3 \cos \omega_2 t + \\ & -\frac{6}{4} K_3 A_1^2 A_2 \cos \omega_2 t - \frac{6}{4} K_3 A_2 A_3^2 \cos \omega_2 t - \frac{3}{4} K_3 A_1 A_2^2 \cos(2\omega_2 - \omega_1) \cdot t + \\ & -\frac{6}{4} K_3 A_1 A_2 A_3 \cos(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3) \cdot t + K_1 A_3 \cos \omega_3 t - \frac{3}{4} K_3 A_3^3 \cos \omega_3 t + \\ & -\frac{6}{4} K_3 A_1^2 A_3 \cos \omega_3 t - \frac{6}{4} K_3 A_2^2 A_3 \cos \omega_3 t + \\ & -\frac{6}{4} K_3 A_1 A_2 A_3 \cos(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \cdot t - \frac{3}{4} K_3 A_2 A_3^2 \cos(2\omega_3 - \omega_2) \cdot t + \\ & -\frac{3}{4} K_3 A_1 A_3^2 \cos(2\omega_3 - \omega_1) \cdot t - \frac{1}{4} K_3 A_1^3 \cos(3\omega_1) \cdot t + \\ & -\frac{3}{4} K_3 A_1^2 A_2 \cos(2\omega_1 + \omega_2) \cdot t - \frac{3}{4} K_3 A_1 A_2^2 \cos(2\omega_2 + \omega_1) \cdot t + \\ & -\frac{1}{4} K_3 A_2^3 \cos(3\omega_2) \cdot t - \frac{3}{4} K_3 A_1^2 A_3 \cos(2\omega_1 + \omega_3) \cdot t + \\ & -\frac{6}{4} K_3 A_1 A_2 A_3 \cos(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \cdot t - \frac{3}{4} K_3 A_2^2 A_3 \cos(2\omega_2 + \omega_3) \cdot t + \\ & -\frac{3}{4} K_3 A_1 A_3^2 \cos(2\omega_3 + \omega_1) \cdot t - \frac{3}{4} K_3 A_2 A_3^2 \cos(2\omega_3 + \omega_2) \cdot t + \\ & -\frac{1}{4} K_3 A_3^3 \cos(3\omega_3) \cdot t \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nesta condição, deve-se levar em consideração o *Lema 1 – Não Coincidência*, a fim de satisfazer às condições de máxima e mínima degeneração. Sobre esta condição, tem-se que a relação portadora/ruído assumirá valor minimizado.

Quando o número de portadoras é superior a dois, as possibilidades aumentam, consideravelmente, pois ocorrem diversas combinações de níveis. As três portadoras podem assumir níveis maiores, menores ou intermediários. Por este motivo, o valor da relação portadora/ruído é representado pelas equações (4.24a), (4.24b) e (4.24c), considerando sempre a portadora 1 como sendo a de maior amplitude. Para implementação de cálculos em rotinas de programas, a solução mais recomendada é que as três formas sejam utilizadas, sendo levado em consideração para o resultado final aquele de menor valor.

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} = \frac{\left|K_1 A_1 - \frac{3}{4} K_3 A_1^3 - \frac{6}{4} K_3 A_1 A_2^2 - \frac{6}{4} K_3 A_1 A_3^2\right|}{\left|\frac{6}{4} K_3 A_1 A_2 A_3\right|} \quad (4.24a)$$

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} = \frac{\left|K_1 A_1 - \frac{3}{4} K_3 A_1^3 - \frac{6}{4} K_3 A_1 A_2^2 - \frac{6}{4} K_3 A_1 A_3^2\right|}{\left|\frac{3}{4} K_3 A_1^2 A_2\right|} \quad (4.24b)$$

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} = \frac{\left|K_1 A_1 - \frac{3}{4} K_3 A_1^3 - \frac{6}{4} K_3 A_1 A_2^2 - \frac{6}{4} K_3 A_1 A_3^2\right|}{\left|\frac{3}{4} K_3 A_1^2 A_3\right|} \quad (4.24c)$$

Considerando as três portadoras de mesma amplitude; isto é: $A_1=A_2=A_3=A$, e fazendo uso da relação (4.24a), tem-se a relação/portadora ruído dada por (4.25):

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} = \frac{\left|K_1 - \frac{15}{4} K_3 A^2\right|}{\left|\frac{6}{4} K_3 A^2\right|} \quad (4.25)$$

Na pior situação, onde as condições (4.15) e (4.16), impostas pelo *Lema 1 – Não Coincidência* não estiverem verificadas, a relação portadora/ruído será dada pela equação (4.26), considerando a portadora 1 como sendo a de maior amplitude.

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} = \frac{\left|K_1 A_1 - \frac{3}{4} K_3 A_1^3 - \frac{6}{4} K_3 A_1 A_2^2 - \frac{6}{4} K_3 A_1 A_3^2\right|}{\left|\frac{3}{4} K_3 A_1^2 A_2 + \frac{6}{4} K_3 A_1 A_2 A_3\right|} \quad (4.26)$$

Com as portadoras trabalhando com a mesma amplitude, a equação (4.26) resulta na equação (4.27).

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} = \frac{\left|K_1 - \frac{15}{4} K_3 A^2\right|}{\left|\frac{9}{4} K_3 A^2\right|} \quad (4.27a)$$

Ou alternativamente,

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} [dB] = 20 \cdot \log \left[\frac{\left|K_1 - \frac{15}{4} K_3 A^2\right|}{\left|\frac{9}{4} K_3 A^2\right|} \right] \quad (4.27b)$$

4.3.4. Produtos de intermodulação com cinco portadoras

Com o aumento do número de portadoras, tem-se uma diversidade cada vez maior de combinações de níveis, se o sistema opera com portadoras de amplitudes diferentes, o que obriga a utilização de programas computacionais para resolução dos problemas. Este trabalho abordará a forma generalizada para determinação da relação portadora/ruído de intermodulação, levando em consideração todas as portadoras com a mesma amplitude.

Assumindo a hipótese de que o *Lema 1 – Não Coincidência* é atendido, neste caso tem-se que a relação portadora/ruído de intermodulação é dada pela equação (4.28):

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} = \frac{\left|K_1 - \frac{27}{4}K_3A^2\right|}{\left|\frac{6}{4}K_3A^2\right|} \quad (4.28)$$

Na pior situação, onde as condições (4.15) e (4.16), impostas pelo *Lema 1* não estiverem verificadas, a relação é dada pela equação (4.29):

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} = \frac{\left|K_1 - \frac{27}{4}K_3A^2\right|}{\left|\frac{30}{4}K_3A^2\right|} \quad (4.29a)$$

Ou alternativamente,

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} [dB] = 20 \cdot \log \left[\frac{\left|K_1 - \frac{27}{4}K_3A^2\right|}{\left|\frac{30}{4}K_3A^2\right|} \right] \quad (4.29b)$$

4.3.5. Produtos de intermodulação com N portadoras

Através de um número grande de simulações, de extensivos cálculos analíticos e fazendo uso do *Método de Indução Finita*, é possível determinar equações para cálculo do valor da relação portadora/ruído de intermodulação em função do número de portadoras e das características do *transponder*.

O Apêndice C, também, traz a verificação de uma propriedade genérica e original na atual literatura e que é de grande valia para que se possa atingir os propósitos desta dissertação. Com este objetivo enuncia-se o:

Lema 2 – Relação Portadora/Ruído de intermodulação: Assumindo verificadas as hipóteses do *Lema 1*. Se as portadoras têm amplitudes satisfazendo:

$$A_i = A_{i+1} = A \quad \forall i \in I - \{N\},$$

Então, a relação portadora/ruído de intermodulação satisfaz:

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} = \frac{\left|K_1 - \frac{1}{4}K_3A^2[9 + 3!(N-2)]\right|}{\left|\frac{6}{4}K_3A^2\right|} \quad (4.30)$$

onde N é o número de portadoras que trafegam pelo satélite.

Se as hipóteses do *Lema 1* não são válidas, a relação portadora/ruído de intermodulação satisfaz:

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} = \frac{\left|K_1 - \frac{1}{4}K_3A^2[9 + 3!(N-2)]\right|}{\left|\frac{1}{4}K_3A^2 \sum_{n=1}^{(N-1)} 3n\right|} \quad (4.31a)$$

Ou alternativamente,

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{IMD} = 20 \cdot \log \left[\frac{\left|K_1 - \frac{1}{4}K_3A^2[9 + 3!(N-2)]\right|}{\left|\frac{1}{4}K_3A^2 \sum_{n=1}^{(N-1)} 3n\right|} \right] \quad (4.31b)$$

■

4.4. Conclusão

As equações (4.30) e (4.31) permitem tirar algumas conclusões de suma importância neste estudo; quais sejam:

- Com o aumento do nível de portadoras, ocorre um aumento do nível de intermodulação;
- De acordo com os lemas 1 e 2, o aumento do número de portadoras não acarreta um aumento de amplitude nos produtos de intermodulação, como pode ser notado no denominador da equação (4.30). No entanto, a análise da expressão do numerador, permite concluir que ocorre uma redução do nível da portadora fundamental, caracterizando a compressão de ganho.
- Neste caso, embora mais moderada, continua existindo uma redução da relação portadora/ruído, com o aumento do número de portadoras. O aumento

da compressão de ganho com o número de portadoras, próximo da região de saturação do amplificador, fica bem ilustrado na Figura (4.13).

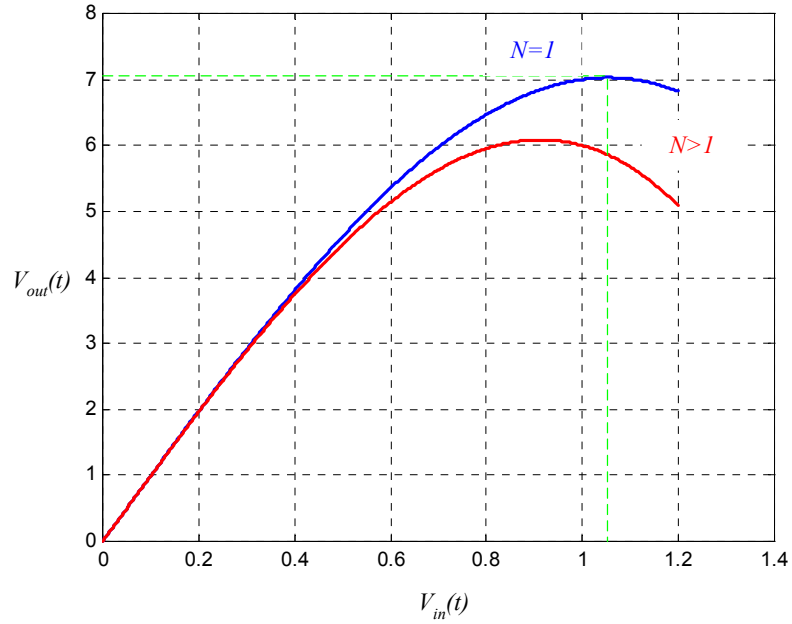


Figura 4.13. Função de transferência dos transponders com N portadoras.

Referência Bibliográfica

- ¹ Kenington, Peter B.. *High-Linearity RF Amplifier Design*. Ed. Artech House, Inc. 2000.
- ² Radmanesh, Matthew M.. *Radio Frequency and Microwave Eletronics*, Ed. Prentice Hall, Inc. 2001.
- ³ TESE do Marcos.
- ⁴ Thomas, Jeffrey L.. *Cable Television Proof-of-Performance*, Ed. Prentice Hall, Inc. 1995.
- ⁵ Maral, G.; Bousquet, M.. *Satellite Communications Systems: Systems, Techniques and Technology*. 4th Ed.. John Wiley & Sons, Inc, 2002.
- ⁶ Pratt, Timothy; Bostian, Charles W.; Allnutt, Jeremy E.; *Satellite Communications*. 2nd Ed.. John Wiley & Sons, 2002.