Slide 1

Notação Assintótica

- Vamos expressar complexidade através de funções em variáveis que descrevam o tamanho de instâncias do problema.
  Exemplos:
  - Problemas de aritmética de precisão arbitrária: número de bits (ou bytes) dos inteiros.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas de ordenação de vetores: tamanho do vetor.
  - Busca em textos: número de caracteres do texto ou padrão de busca.
- Vamos supor que funções que expressam complexidade são sempre positivas, já que estamos medindo número de operações.

Slide 2

Comparação de Funções

- Vamos comparar funções assintoticamente, ou seja, para valores grandes, desprezando constantes multiplicativas e termos de menor ordem.

	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10^4$	$n = 10^6$	$n = 10^9$
$\log n$	2	3	4	6	9
n	100	1000	10^4	10^6	10^9
$n \log n$	200	3000	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^9$
n^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}	10^{18}
$100n^2 + 15n$	$1,0015 \cdot 10^6$	$1,00015 \cdot 10^8$	$\approx 10^{10}$	$\approx 10^{14}$	$\approx 10^{20}$
2^n	$\approx 1,26 \cdot 10^{30}$	$\approx 1,07 \cdot 10^{301}$	?	?	?

Na maioria dos casos práticos, quando queremos resolver um problema computacionalmente, queremos ser capazes de resolver instâncias muito grandes do problema. Por isso, estaremos interessados em comparar as funções de complexidade assintoticamente, quando as variáveis das funções comparadas tendem a +infinito.

Quando comparamos assintoticamente duas funções, podemos desprezar as constantes multiplicativas das variáveis e termos de menor grau das funções, pois estes não alteram a ordem de grandeza do crescimento das funções. É exatamente para comparar ordens de grandeza das funções que utitizamos as classes O, Ω, Θ, o e ω.

Slide 3

Classe O

Definição:

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{ existem constantes positivas } c \text{ e } n_0 \text{ tais que } 0 \leq f(n) \leq cg(n), \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in O(g(n))$, então $f(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $g(n)$.

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$

Valores de c e n_0 que satisfazem a definição são

$$c = \frac{1}{2} \text{ e } n_0 = 7.$$

Quando $f(n) \in O(g(n))$, dizemos que $g(n)$ dá um limite superior para o crescimento de $f(n)$, ou seja, assintoticamente, $f(n)$ não cresce mais que $g(n)$.

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$
Queremos provar que, para algum par de constantes positivas c e n_0, temos

$$0 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq cn^2, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Dividindo ambos os lados da equação por n^2, percebemos que queremos encontrar c e n_0 tais que

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Como a função $\frac{1}{2} - \frac{3}{n}$ nunca é maior que $\frac{1}{2}$ e é positiva para $n \geq 7$, então $c = \frac{1}{2}$ e $n_0 = 7$ certificam que $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$. Note que esse não é o único par de constantes que garante a pertinência de $\frac{1}{2}n^2 - 3n$ a $O(n^2)$; existem infinitos pares.

Slide 4

Classe Ω

Definição:

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \quad \text{existem constantes positivas } c \text{ e } n_0 \text{ tais que } 0 \leq cg(n) \leq f(n), \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce no mínimo tão lentamente quanto $g(n)$.

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$

Valores de c e n_0 que satisfazem a definição são

$$c = \frac{1}{14} \text{ e } n_0 = 7.$$

Quando $f(n) \in \Omega(g(n))$, dizemos que $g(n)$ dá um limite inferior para o crescimento de $f(n)$, ou seja, assintoticamente, $f(n)$ não cresce menos que $g(n)$.

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$
Queremos provar que, para algum par de constantes positivas c e n_0, temos

$$0 \leq cn^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Dividindo ambos os lados da equação por n^2, percebemos que queremos encontrar c e n_0 tais que

$$0 \leq c \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n}, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Note que, para $n \leq 6$, temos $\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq 0$. Como c deve ser uma constante positiva, teremos $n_0 \geq 7$. Mas $\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq 0$ cresce monotonicamente para $n \geq 7$, então $c = \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$ e $n_0 = 7$ certificam que $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$.

Slide 5

Classe Θ

Definição:

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \quad \begin{array}{l} \text{existem constantes positivas } c_1,\, c_2 \text{ e } n_0 \\ \text{tais que } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \\ \text{para todo } n \geq n_0\}. \end{array}$$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $f(n)$ cresce tão rapidamente quanto $g(n)$.

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$

Valores de c_1, c_2 e n_0 que satisfazem a definição são

$$c_1 = \frac{1}{14},\ c_2 = \frac{1}{2} \text{ e } n_0 = 7.$$

Comparando as definições apresentadas anteriormente das funções $f(n)$ que compõem as classes $O(g(n))$ e $\Omega(g(n))$ com a definição das funções $f(n)$ que compõem as classes $\Theta(g(n))$, verificamos que $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$.

Exemplo: $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$

Já provamos anteriormente que $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$ e $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$, logo $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$.

No entanto, quais seriam as constantes positivas c_1, c_2 e n_0 que garantem que $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$?

A resposta é simples: Os valores de c_1 e c_2 são, respectivamente, os mesmos que garantiram que a função estava em $\Omega(n^2)$ e $O(n^2)$, ou seja $c_1 = \frac{1}{14}$ e $c_2 = \frac{1}{2}$; o valor de n_0 deve ser maior entre os dois valores de n_0 utilizados na demonstração de pertinência a $O(n^2)$ e $\Omega(n^2)$, ou seja $n_0 = \max\{7, 7\} = 7$.

Slide 6

Classe o

Definição:

$$o(g(n)) = \{f(n) : \text{ para toda constante positiva } c \text{, existe uma constante } n_0 > 0 \text{ tal que } 0 \leq f(n) < cg(n), \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in o(g(n))$, então $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$.

Exemplo: $1000n^2 \in o(n^3)$

Para todo valor de c, um n_0 que satisfaz a definição é

$$n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1.$$

A relação $f(n) \in o(g(n))$ denota que a função $g(n)$ dá um limite superior assintótico para o crescimento de $f(n)$, mas esse limite não é justo. Em outras palavras, se $f(n) \in o(g(n))$, então certamente $f(n) \in O(g(n))$. Mas, se $f(n) \in O(g(n))$, então ou $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n)$ não é um limitante superior justo para $f(n)$, ou $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n)$ é um limitante superior justo para $f(n)$.

Exemplo: $1000n^2 \in o(n^3)$
Queremos provar que, para toda constante positiva c, existe uma constante $n_0 > 0$, tal que

$$0 \leq 1000n^2 < cn^3, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Dividindo ambos os lados da equação por n^3, percebemos que queremos encontrar valor de n (n_0) a partir do qual a inequação

$$0 \leq \frac{1000}{n} < c. \tag{1}$$

Como $\frac{1000}{n}$ é uma função positiva, decrescente e se iguala a c quando $n = \frac{1000}{c}$, basta tomarmos

$$n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1,$$

para que a inequação (1) se verifique sempre que $n \geq n_0$.

Slide 7

Classe ω

Definição:

$$\omega(g(n)) = \{f(n) : \text{ para toda constante positiva } c, \text{ existe uma constante } n_0 > 0 \text{ tal que } 0 \leq cg(n) < f(n), \text{ para todo } n \geq n_0.\}$$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in w(g(n))$, então $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$.

Exemplo: $\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

Para todo valor de c, um n_0 que satisfaz a definição é

$$n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1.$$

A relação $f(n) \in \omega(g(n))$ denota que a função $g(n)$ dá um limite inferior assintótico para o crescimento de $f(n)$, mas esse limite não é justo. Em outras palavras, se $f(n) \in \omega(g(n))$, então certamente $f(n) \in \Omega(g(n))$. Mas, se $f(n) \in \Omega(g(n))$, então ou $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n)$ não é um limitante inferior justo para $f(n)$, ou $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n)$ é um limitante inferior justo para $f(n)$.

Exemplo: $\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$
Queremos provar que, para toda constante positiva c, existe uma constante $n_0 > 0$, tal que

$$0 \leq cn < \frac{1}{1000}n^2, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Dividindo ambos os lados da equação por n^2, percebemos que queremos encontrar o valor de n (n_0) a partir do qual a inequação

$$0 \leq c < \frac{n}{1000}. \tag{2}$$

Como $\frac{n}{1000}$ é uma função positiva, crescente e se iguala a c quando $n = \frac{c}{1000}$, basta tomarmos

$$n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1,$$

para que a inequação (2) se verifique sempre que $n \geq n_0$.

Slide 8

Definição equivalente

$f(n) \in o(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

$f(n) \in O(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.

$f(n) \in \Theta(g(n))$ se $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.

$f(n) \in \Omega(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.

$f(n) \in \omega(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

O primeiro conjunto de definições (usando constantes) e o segundo (usando limites) são equivalentes. Existem situações em que é mais fácil utilizar um e outras em que é mais fácil utilizar o outro.

Slide 9

Propriedades das Classes

Transitividade:

Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.

Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.

Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.

Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.

Se $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n) \in \omega(h(n))$, então $f(n) \in \omega(h(n))$.

Vamos provar que a transitividade vale na classe O. Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então existem constantes positivas c_1, c_2, n_1, n_2 tais que

$$0 \leq f(n) \leq c_1 g(n), \text{ para todo } n \geq n_1,$$

e

$$0 \leq g(n) \leq c_2 h(n), \text{ para todo } n \geq n_2.$$

Concluímos então que

$$0 \leq f(n) \leq c_1 c_2 h(n), \text{ para todo } n \geq \max\{n_1, n_2\}.$$

Portanto, as constantes positivas $c = c_1 c_2$ e $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ certificam que $f(n) \in O(h(n))$.

A demonstração da validade da transitividade para as classes Ω e Θ é análoga. Mas, e para as classes o e ω, como seria a demonstração?

Slide 10

Propriedades das Classes

Reflexividade:

$f(n) \in O(f(n))$.

$f(n) \in \Omega(f(n))$.

$f(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria:

$f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria Transposta:

$f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.

$f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

A propriedade de reflexividade vale trivialmente para as classes O, Ω e Θ e não vale trivialmente para as classes o e ω. Por quê?

Vamos provar que a simetria vale na classe Θ. Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ então existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n), \text{ para todo } n \geq n_0, \tag{3}$$

e

$$0 \leq f(n) \leq c_2 g(n), \text{ para todo } n \geq n_0, \tag{4}$$

Dividindo as inequações (3) e (4) por c_1 e c_2, respectivamente, temos que:

$$0 \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

e

$$0 \leq \frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Portanto, as constantes positivas $c_2' = \frac{1}{c_2}$, $c_1' = \frac{1}{c_1}$ e n_0 certificam que $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Esse mesmo argumento prova a recíproca.

A demonstração da validade da simetria transposta para os pares de classes (O, Ω) e (o, ω) é análoga. Pense nos detalhes!

Slide 11

Exemplos

Quais as relações de comparação assintótica das funções:

- 2^π
- $\log n$
- n
- $n \log n$
- n^2
- $100n^2 + 15n$
- 2^n