PARTE 6 - LÓGICA NEBULOSA

6.1. Conjuntos ordinários ("crisp") e nebulosos ("fuzzy")

6.1.1. Conjuntos ordinários

Para indicar que um elemento individual x é um membro ou elemento de um conjunto A, escreve-se

$$x \in A.$$

Quando x não é um elemento de um conjunto A, escreve-se

$$x \notin A.$$

Um conjunto pode ser descrito pelos nomes de seus elementos. Suponha que um conjunto A tenha os elementos $a_1, a_2, ..., a_n$. Este conjunto pode ser descrito como:

$$A = \{ a_1, a_2, ..., a_n \},$$

Como, para a teoria clássica de conjuntos, um elemento pertence a A ou não pertence a A, pode-se definir uma *função de pertinência* $\mu_A(x)$, que será igual a 1, se $x \in A$ e igual a 0 se $x \notin A$. Suponha agora que X é o conjunto universo. A função de pertinência pode ser descrita como:

$$\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}.$$

Pode-se representar o conjunto A em termos da função de pertinência de seus elementos. Suponha que A = {1, 3, 4, 6, 8} em X = [1,10]. Logo A pode ser descrito como A = $\{ \mu_A(x_i)/x_i \}$, ou seja

$$A = \{1/1, 0/2, 1/3, 1/4, 0/5, 1/6, 0/7, 1/8, 0/9, 0/10\}.$$

Todas as definições, teoremas e propriedades da lógica de predicados clássica valem para os conjuntos ordinários. O complemento de um conjunto A pode ser definido como:

$$\neg A = \{ x \mid x \notin A \}.$$

A partir desta definição conclui-se que

$$\neg \varnothing = X,$$

e

$$\neg X = \varnothing.$$

onde $\emptyset$ representa o conjunto vazio.

A união de dois conjuntos A e B é o conjunto contendo todos os elementos que pertencem só ao conjunto A, só ao B ou a ambos. Isto é denotado por

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}.$$

A partir disto pode-se concluir que

$$A \cup X = X$$

e

$$A \cup \emptyset = A.$$

A *lei do terceiro excluído* pode ser representada por:

$$A \cup \neg A = X.$$

A intersecção dos conjuntos A e B é o conjunto contendo todos os elementos que pertencem a A e a B. É denotado por

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}.$$

Pode-se então concluir que

$$A \cap X = A$$

e

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

A *lei da contradição* estabelece que

$$A \cap \neg A = \emptyset.$$

6.1.2. Conjuntos nebulosos

Para os conjuntos nebulosos ("fuzzy"), a função de pertinência dos elementos de um conjunto varia entre 0 e 1, incluindo os extremos, ou seja:

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1].$$

Ou seja, neste caso não tem mais sentido dizer que um elemento pertence ou não a um conjunto. Deve-se dizer que um elemento pertence com grau de pertinência de 0.9, por exemplo, se ele "quase" pertencer, ou com grau de pertinência de 0.1, se ele "quase" não pertencer. Os extremos do intervalo correspondem ao *pertence* e ao *não pertence* da lógica clássica. Para um conjunto nebuloso A pode-se ter:

A = { 0.1/1, 0.8/2, 1/3, 1/4, 0.3/5, 0/6, 0/7, 0.2/8, 0.1/9, 1/10}.

Para este conjunto pode-se dizer que os elementos 3, 4 e 10 pertencem a A (grau de pertinência igual a 1), 6 e 7 não pertencem a A (grau de pertinência 0), 1 e 9 pertencem com grau de pertinência 0.1, 8 pertence com grau 0.2, 5 pertence com grau 0.3 e 2 pertence com grau 0.8.

As operações com os conjuntos nebulosos são diferentes das operações com conjuntos ordinários. As leis do terceiro excluído e da contradição não são satisfeitas para conjuntos nebulosos.

6.1.2.1. Operações com conjuntos nebulosos

Para os conjuntos nebulosos existem diversas definições para o complemento, a união e a interseção de conjuntos. As mais aceitas são as seguintes (em termos da função de pertinência de seus elementos):

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x),$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)],$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)].$$

Exemplos: Para

A = {0.1/1, 0.7/2, 1/3, 0/4, 0.5/5, 0.2/6, 0.1/7, 0.9/8, 0/9, 1/10} e
B = {0.9/1, 1/2, 1/3, 0/4, 0/5, 0.1/6, 0.9/7, 1/8, 0.3/9, 0.1/10},

tem-se

¬A = {0.9/1, 0.3/2, 0/3, 1/4, 0.5/5, 0.8/6, 0.9/7, 0.1/8, 1/9, 0/10}
¬B = { 0.1/1, 0/2, 0/3, 1/4, 1/5, 0.9/6, 0.1/7, 0/8, 0.7/9, 0.9/10}

A ∪ B = { 0.9/1, 1/2, 1/3, 0/4, 0.5/5, 0.2/6, 0.9/7, 1/8, 0.3/9, 1/10}
A ∩ B = { 0.1/1, 0.7/2, 1/3, 0/4, 0/5, 0.1/6, 0.1/7, 0.9/8, 0/9, 0.1/10}

6.1.3. A resolução dos "paradoxos" da lógica clássica

Pelo exemplo apresentado acima, dá para concluir que a lei do terceiro excluído não é satisfeita, ou seja, $A \cup \neg A \neq X$, pois

A ∪ ¬A = { 0.9/1, 0.7/2, 1/3, 1/4, 0.5/5, 0.8/6, 0.9/7, 0.9/8, 1/9, 1/10}

que é diferente do conjunto universo X, a menos dos valores de pertinência para 3, 4, 9 e 10. A lei da contradição também não é satisfeita, pois $A \cap \neg A \neq \emptyset$, como pode ser visto abaixo:

$$A \cap \neg A = \{ 0.1/1, 0.3/2, 0/3, 0/4, 0.5/5, 0.2/6, 0.1/7, 0.1/8, 0/9, 0/10\}$$

que é diferente do conjunto vazio, a menos dos valores de pertinência para 3, 4, 9 e 10.

Observe agora o valor de pertinência para 5: $\mu_A(5) = 0.5$ e $\mu_{\neg A}(5) = 0.5$. Ou seja, para o elemento 5, $\mu_{\neg A}(x) = \mu_A(x)$. Isto resolve os chamados "paradoxos" da lógica clássica como o do barbeiro: "Numa cidade existia um barbearia onde se lia em uma tabuleta: 'Aqui se barbeia apenas e tão somente aqueles que não se barbeiam'.". Pergunta: quem faz a barba do barbeiro? Se ele se barbeia, então pela definição ele não se barbeia. Se ele não se barbeia, então pela definição ele se barbeia. Na verdade o que se tem aqui são duas proposições que são, ao mesmo tempo, contraditórias e equivalentes, ou seja, se P é a proposição que significa que o barbeiro faz sua própria barba e $\neg P$ que ele não faz, tem-se que:

$$P \rightarrow \neg P \text{ e}$$
$$\neg P \rightarrow P.$$

Logo,

$$\mu_P(x) = \mu_{\neg P}(x).$$

Para a lógica nebulosa, pela definição do complemento, vem

$$\mu_{\neg P}(x) = 1 - \mu_P(x).$$

conclui-se que

$$\mu_P(x) = \mu_{\neg P}(x) = 0.5.$$

6.2. Exercícios

1. As lógicas de três valores foram concebidas como um passo intermediário entre a lógica clássica (booleana) e a lógica nebulosa. Nesta lógica, três valores são possíveis: 0, 1/2 e 1. Para esta lógica, proposta por Lukasiewicz, define-se as primitivas pelas seguintes equações:

$$\neg a = 1 - a$$
$$a \wedge b = \min(a,b)$$
$$a \vee b = \max(a,b)$$
$$a \rightarrow b = \min(1, 1 + b - a)$$
$$a \leftrightarrow b = 1 - |a - b|$$

Para esta lógica determine os valores-verdade para cada uma das seguintes expressões lógicas para todas as combinações de valores-verdade das variáveis lógicas *a*, *b* e *c* :

a) $(\neg a \wedge b) \rightarrow c$;
b) $(\neg a \vee \neg b) \leftrightarrow \neg(a \wedge b)$;
c) $(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg c \rightarrow a)$.

2. Seja a tabela abaixo:

Propriedades das operações de conjuntos ordinários

Involução	$\neg\neg A = A$
Comutatividade	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associatividade	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributividade	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotência	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Absorção	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Absorção do complemento	$A \cup (\neg A \cap B) = A \cup B$ $A \cap (\neg A \cup B) = A \cap B$
Absorção por X e $\varnothing$	$A \cup X = X$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Identidade	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap X = A$
Lei da contradição	$A \cap \neg A = \varnothing$
Lei do terceiro excluído	$A \cup \neg A = X$
Leis de De Morgan	$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

Para cada uma das propriedades das operações de conjuntos ordinários listadas na tabela acima, determine se as propriedades valem para as operações de complemento, união e interseção originalmente propostas para conjuntos nebulosos.

3. Considerando os conjuntos nebulosos A, B e C definidos no intervalo X = [0,10] de números reais pelas funções de pertinência

$$\mu_A(x) = \frac{x}{x+2} \qquad \mu_B(x) = 2^{-x} \qquad \mu_C(x) = \frac{x}{1 + 10(x-2)^2}$$

Determine fórmulas matemáticas e gráficos das funções de pertinência de cada uma das seguintes expressões:

(a) $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$;
(b) $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$
(c) $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$
(d) $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$

(e) $A \cap \neg C$, $\neg(\neg B \cap C)$, $\neg(A \cup C)$

BIBLIOGRAFIA

- Klir, G. A. & Folger, T. A. (1988). Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information. Prentice-Hall.

- Kosko, B. (1992). Neural Networks and Fuzzy Systems - A dynamical approach to machine intelligence. Prentice-Hall.