Inteligência Artificial
IA

Prof. João Luís Garcia Rosa

II. LÓGICA DE PREDICADOS PARA REPRESENTAÇÃO DO CONHECIMENTO

2004

Representação do conhecimento

- Para representar o conhecimento do mundo que um sistema de IA necessita, explora-se o uso da lógica proposicional. Vai-se representar os fatos do mundo real através das *fórmulas bem formadas ("fbf's")* ou *proposições lógicas*, como mostrado abaixo:

Representação do conhecimento

– Está chovendo.
  - *chovendo*
– Está ensolarado.
  - *ensolarado*
– Se está chovendo, então não está ensolarado.
  - *chovendo* $\rightarrow \neg$*ensolarado*

- Lógica das proposições, ou *Lógica Proposicional*

Sintaxe das linguagens proposicionais

- Um *alfabeto proposicional* α consiste de
  – *símbolos lógicos*:
    - *pontuação*: (,)
    - *conectivos*: $\neg$ (negação)
    - $\wedge$ (conjunção)
    - $\vee$ (disjunção)
    - $\rightarrow$ (implicação)
    - $\equiv$ ou $\leftrightarrow$ (equivalência ou bi-implicação)
  – *símbolos não-lógicos*: um conjunto finito **P** de *símbolos proposicionais* diferentes dos símbolos lógicos. Ex. p, q, etc.

Sintaxe das linguagens proposicionais

- O conjunto de *fórmulas proposicionais* (ou simplesmente *fórmulas*) é o menor conjunto de cadeias satisfazendo às seguintes condições:
  – todo símbolo proposicional é uma fórmula;
  – se p e q são fórmulas, então $(\neg p)$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$ e $(p \equiv q)$ também são fórmulas.
- Uma fórmula q é uma *subfórmula* de uma fórmula p se e somente se q é uma subcadeia de p.
- A *linguagem proposicional,* denotada por $L(\alpha)$, é o conjunto das fórmulas proposicionais.

Semântica das linguagens proposicionais

- As fórmulas de uma linguagem proposicional, incluindo os símbolos proposicionais, terão como significado os valores-verdade *FALSO* ou *VERDADEIRO*, abreviados *F* e *V*, respectivamente.

- Seja **P** o conjunto de símbolos proposicionais de α. Uma *atribuição de valores-verdade* para α (ou simplesmente uma *atribuição* para α) é uma função *a*: $\mathbf{P} \Rightarrow \{F, V\}$.

Semântica das linguagens proposicionais

- Seja *a* uma atribuição de valores-verdade. A *função de avaliação* para L(α) *induzida* por *a* é a função *v*: L(α) ⇒ {*F*, *V*} definida da seguinte forma:

v(a) = *a*(a),	se a é um símbolo proposicional
v(¬p)	= *V*, se *v*(p) = *F*
	= *F*, se *v*(p) = *V*
v(p ∧ q)	= *V*, se *v*(p) = *v*(q) = *V*
	= *F*, em caso contrário
v(p ∨ q)	= *F*, se *v*(p) = *v*(q) = *F*
	= *V*, em caso contrário
v(p → q)	= *F*, se *v*(p) = *V* e *v*(q) = *F*
	= *V*, em caso contrário
v(p ≡ q)	= *V*, se *v*(p) = *v*(q)
	= *F*, em caso contrário

Semântica das linguagens proposicionais

- Sejam **P** e **Q** conjuntos de fórmulas em L(α) e r uma fórmula em L(α).
  - r é *verdadeira* em uma atribuição de valores-verdade *a* se e somente se *v*(r) = *V*. Em caso contrário, r é *falsa*.
  - r é uma *tautologia* se e somente se, para toda atribuição de valores-verdade *a*, *v*(r) = *V*.
  - uma atribuição de valores-verdade *a satisfaz* a **P**, ou *a* é um *modelo* para **P**, se e somente se, para toda fórmula s em **P**, *v*(s) = *V*.
  - **P** é *satisfatível* se e somente se existe uma atribuição de valores-verdade *a* que satisfaz **P**. Em caso contrário, **P** é *insatisfatível*.
  - r é uma *conseqüência lógica* de **P**, ou **P** *implica logicamente* r (notação: **P** |= r), se e somente se, para toda atribuição de valores-verdade *a*, se *a* satisfaz **P** então *a* satisfaz r.
  - **P** é *tautologicamente equivalente* a **Q** (notação: **P** |=| **Q**) se e somente se toda fórmula de **Q** for conseqüência lógica de **P** e vice-versa.

- O Método da Tabela-verdade
  - Exemplo:
    - Seja **P** o seguinte conjunto de fórmulas:
      - 1. $a \rightarrow \neg b$
      - 2. $b \wedge a$
      - 3. b,
    - seja **Q** o seguinte conjunto de fórmulas:
      - 1. $a \vee b$
      - 2. $b \rightarrow a$
    - e seja r a fórmula $\neg b \rightarrow a$

a	b	$a \rightarrow \neg b$	$b \wedge a$	b	$a \vee b$	$b \rightarrow a$	$\neg b \rightarrow a$
F	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*
F	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*
V	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*
V	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*

Lógica de Primeira Ordem

- A Lógica de primeira ordem, ou Cálculo de Predicados de Primeira Ordem (CPPO) pode ser caracterizada como um sistema formal apropriado a definição de teorias do universo de discurso da Matemática. A motivação para se estudar esta lógica é que a lógica sentencial não dá conta da representação de frases do tipo:
  - “Sócrates é homem.”
  - “Platão é homem.”
  - “Todos os homens são mortais.”

Alfabeto de Primeira Ordem

- Um *alfabeto de primeira ordem* α consiste de:
  - *símbolos lógicos*:
    - *pontuação*:
      (,)
    - *conectivos*:
      $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv$
    - *quantificadores*:
      $\forall$ (quantificador universal)
      $\exists$ (quantificador existencial)
    - *variáveis*:
      um conjunto de símbolos distintos dos demais, por convenção, representadas por letras maiúsculas: *X*, *Y*, *Z*, etc.
    - *símbolo de igualdade* (opcional):
      =

Alfabeto de Primeira Ordem

– *símbolos não-lógicos*:
  - Um conjunto, possivelmente vazio, de *constantes* distintas dos demais símbolos.
  - Para cada n > 0, um conjunto, possivelmente vazio, de *símbolos funcionais n-ários* distintos dos demais símbolos.
  - Para cada n > 0, um conjunto, possivelmente vazio, de *símbolos predicativos n-ários* distintos dos demais símbolos.

Termo de Primeira Ordem

- O conjunto de *termos de primeira ordem* (ou simplesmente *termos*) é o menor conjunto satisfazendo às seguintes condições:
  - toda variável é um termo;
  - toda constante é um termo;
  - se t1 ,...,t*n* são termos e f é um símbolo funcional n-ário, então f(t1 ,...,t*n*) também é um termo.

Fórmula de Primeira Ordem

- O conjunto de *fórmulas* é o menor conjunto satisfazendo às seguintes condições:
  – se $t1, ..., t\mathit{n}$ são termos e p é um símbolo predicativo n-ário, então $p(t1, ..., t\mathit{n})$ é uma fórmula, chamada de *fórmula atômica*.
  – se $t1, ..., t\mathit{n}$ são termos e "=" é um símbolo de α, então $(t1 = t2)$ é uma fórmula, também chamada de *fórmula atômica*.
  – se p e q são fórmulas, então $(\neg p)$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$ e $(p \equiv q)$ também são fórmulas.
  – se p é uma fórmula e X é uma variável, então $\forall X(p)$ e $\exists X(p)$ também são fórmulas.

Lógica de Primeira Ordem

- A *linguagem de primeira ordem*, denotada por $L(\alpha)$, é o conjunto de termos e fórmulas de primeira ordem.
- Em uma fórmula da forma $\forall X(q)$ (ou da forma $\exists X(q)$), q é o *escopo* de $\forall X$ (ou de $\exists X$).
- Uma ocorrência de uma variável X em uma fórmula p é *ligada* em p, se a ocorrência se dá em uma subfórmula de p da forma $\forall X(q)$ ou da forma $\exists X(q)$. Caso contrário, a ocorrência de X é *livre*.
- Uma variável X é *livre* em p se existe uma ocorrência livre de X em p.
- Uma fórmula p é uma *sentença* se e somente se nenhuma variável ocorre livre em p.

Lógica de Primeira Ordem

- Dada uma fórmula p, com variáveis livres $x1,...,xn$, o *fecho universal* de p é a fórmula $\forall x1 \ldots \forall xn$ (p) e o *fecho existencial* de p é a fórmula $\exists x1 \ldots \exists xn$ (p).
- Uma fórmula p está na *forma normal prenex* se e somente se p for da forma q(M) onde q, o *prefixo* de p, é uma cadeia de quantificadores e M, a *matriz* de p, é uma fórmula sem ocorrências de quantificadores.
- Uma fórmula p é uma *conjunção* se e somente se, omitindo-se os parênteses, for da forma $P1 \wedge \ldots \wedge Pn$
- Uma fórmula p é uma *disjunção* se e somente se, omitindo-se os parênteses, for da forma $P1 \vee \ldots \vee Pn$

Lógica de Primeira Ordem

- Uma fórmula p está em *forma normal conjuntiva* se e somente se estiver em forma normal prenex e a sua matriz for uma conjunção de disjunções de fórmulas atômicas, negadas ou não.
- *Regra de Inferência* (**Modus Ponens**):
  - a partir de p e de $(p \rightarrow q)$, deduza q.

Notação Clausal

- Um *literal positivo* é uma fórmula atômica.
- Um *literal negativo* é a negação de uma fórmula atômica.
- Um *literal* é ou um literal positivo ou um literal negativo.
- Dois literais têm *sinais opostos* se e somente se um deles for positivo e o outro for negativo.
- Dois literais são *complementares* se e somente se um deles for a negação do outro.
- Uma fórmula atômica *F* é o *átomo* de um literal L, denotado por |L|, se e somente se L for *F* ou ¬*F*.

Notação Clausal

- Uma *cláusula* é ou uma seqüência não vazia de literais ou a *cláusula vazia*, denotada por “ ”.
- A *linguagem de cláusulas* é o conjunto de todas as cláusulas.
- Uma interpretação I *satisfaz* uma cláusula não vazia c (denotado por I |= c) se e somente se I satisfaz a sentença *F* definida como

$$\forall X1 \ldots \forall Xm \,(L1 \lor \ldots \lor Ln)$$

  – onde $X1, \ldots, Xm$ são as variáveis ocorrendo em c e $L1, \ldots, Ln$ são os literais de c. Diz-se ainda que c e *F* são *equivalentes*. Por convenção, a cláusula vazia é sempre insatisfatível.

Representação clausal de fórmulas

- Um conjunto de cláusulas **S** é uma *representação clausal* para uma fórmula p se e somente se p é satisfatível se e somente se **S** é satisfatível.
- A obtenção da representação clausal de uma fórmula é um processo mecânico, como descrito a seguir:

Algoritmo de Representação Clausal

- entrada: uma fórmula p
- saída: uma representação clausal **S** para p

(a) Tome o fecho existencial de p
(b) Elimine quantificadores redundantes
(c) Renomeie variáveis quantificadas mais de uma vez.
(d) Elimine os conectivos "$\rightarrow$" e "$\equiv$"
(e) Mova "$\neg$" para o interior da fórmula
(f) Mova os quantificadores para o interior da fórmula. Objetivo: diminuir os escopos dos quantificadores,
(g) Elimine os quantificadores existenciais
(h) Obtenha a forma normal prenex
(i) Obtenha a forma normal conjuntiva
(j) Simplifique (opcional)
(k) Obtenha a representação clausal