

Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Centro de Ciências Exatas, Ambientais e de Tecnologias
Faculdade de Engenharia de Computação

LINGUAGENS FORMAIS E AUTÔMATOS

Lista de Exercícios 1

1. Que linguagem a gramática

$$\begin{aligned} S &\rightarrow () \\ S &\rightarrow)(\\ S &\rightarrow SS \\ S &\rightarrow (S) \\ S &\rightarrow)S(\end{aligned}$$

gera?

2. Que linguagem a gramática

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0 \\ S &\rightarrow 1 \\ S &\rightarrow S0 \end{aligned}$$

gera?

3. Esta gramática:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow () \\ S &\rightarrow (S) \\ S &\rightarrow SSS \end{aligned}$$

gera exatamente a linguagem dos parênteses casados?

4. Escreva uma gramática para a linguagem $\{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$.

5. Que linguagem a gramática $S \rightarrow aSb \mid SS \mid ab \mid ba$ gera? Prove seu resultado.

6. Escreva gramáticas para as seguintes linguagens:

- expressões aritméticas envolvendo os dígitos 0 e 1 e as operações + e *.
Exemplo: $(1 + (0 * 1))$
- $\{w \mid w \text{ é da forma } a^n b^m, \text{ com } n < m\}$
- Fórmulas do cálculo proposicional com duas variáveis, p e q , e conectivos *and*, *or* e *not*. Exemplo: $(p \text{ or } (q \text{ and } (\text{not } p)))$
- $\{ww^R \mid w \text{ em } \{a,b\}^*\}$ onde w^R significa a forma reversa de w , isto é, se $w = abaa$, então $w^R = aaba$.

7. Ache uma GLD para a linguagem $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ não contenha a subcadeia } bab\}$.

8. Seja a seguinte definição: Uma gramática $G = (\Sigma, V, S, P)$ é linear a direita se toda produção for da forma $A \rightarrow bC$ ou $A \rightarrow b$, onde A e $C \in V$ e $b \in \Sigma \cup \{\lambda\}$. Agora seja a seguinte gramática G_1 composta das seguintes produções: $A \rightarrow wB \mid w$, onde A e $B \in V$ e $w \in \Sigma^*$. Mostre que $L(G_1)$ pode ser gerada por uma gramática linear a direita.

9. Descreva em palavras as linguagens especificadas pelas seguintes expressões regulares:

- (a) $(aa)^*(bb)^*$
- (b) $(a^*b^*c^*)^*$
- (c) $((a + b + c)(bb)^* + (a + b + c))^*$
- (d) $(aaa + aaaaa)^*$

10. Dê uma GLD para a linguagem $((a + bb)^* + c)^*$.

11. Converta os seguintes conjuntos regulares em AFNs.

- (a) $((11)^*0)^* + 00)^*$
- (b) $(1 + 11 + 0)^*(00)^*$

12. Especifique e descreva um AFN que aceita o conjunto de todas as sentenças com dois 0's consecutivos ou dois 1's consecutivos, para $\Sigma = \{0, 1\}$.

13. Seja $M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, \{q_0\}, \{q_1\})$ um AFN (autômato finito não determinístico) onde

$$\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\} \quad \delta(q_0, 1) = \{q_1\} \quad \delta(q_1, 0) = \emptyset \quad \delta(q_1, 1) = \{q_0, q_1\}$$

Qual é o AFD (autômato finito determinístico) correspondente?

14. Considere a seguinte gramática regular, $G = (\{0, 1\}, \{S, B\}, S, P)$, onde P consiste de: $S \rightarrow 0B$, $B \rightarrow 0B$, $B \rightarrow 1S$, $B \rightarrow 0$. Pode-se construir um autômato finito não determinístico $M = (\{S, B, A\}, \{0, 1\}, \delta, \{S\}, \{A\})$, onde δ é dado por:

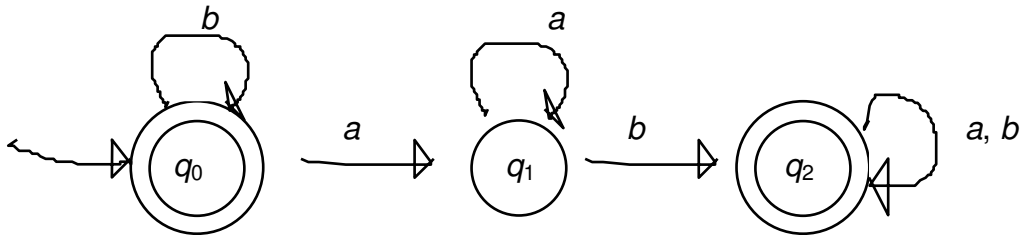
- 1) $\delta(S, 0) = \{B\}$, já que $S \rightarrow 0B$ é a única produção em P com S à esquerda e 0 à direita.
- 2) $\delta(S, 1) = \emptyset$, já que nenhuma produção tem S à esquerda e 1 à direita.
- 3) $\delta(B, 0) = \{B, A\}$, já que $B \rightarrow 0B$ e $B \rightarrow 0$ estão em P .
- 4) $\delta(B, 1) = \{S\}$, já que $B \rightarrow 1S$ está em P .
- 5) $\delta(A, 0) = \delta(A, 1) = \emptyset$.

Ache um autômato finito determinístico M_1 equivalente a M .

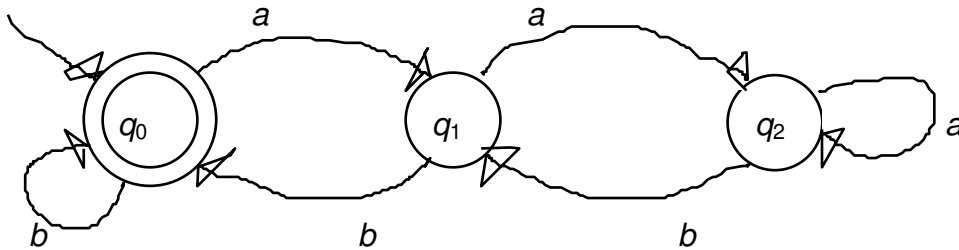
15. Ache um autômato finito determinístico (AFD) que aceite todas as cadeias em $\{0, 1\}^*$ tal que todo 0 tem um 1 imediatamente à sua direita. Construa uma gramática do tipo 3 que gere esta linguagem.

16. Dê os conjuntos regulares correspondentes aos seguintes AFDs:

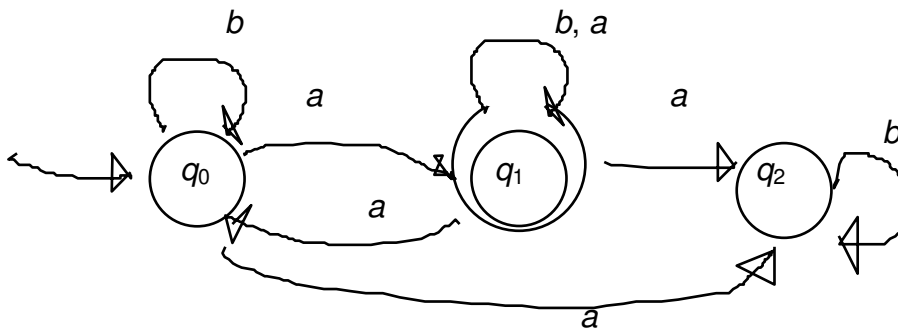
(a)



(b)



17. Converta o seguinte AFN em um AFD.



18. Seja

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$$

um autômato finito não determinístico (AFN) com δ dado por:

	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0, q_1\}$	\emptyset
q_2	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_1\}$

Ache um autômato finito determinístico (AFD) que aceite $T(M)$.

19. Considerando que:

- toda linguagem livre de contexto também é sensível ao contexto;
- nem toda gramática livre de contexto é sensível ao contexto;
- há quatro tipos de gramáticas/linguagens segundo Chomsky,

as gramáticas abaixo são livres de contexto? São sensíveis ao contexto? Por que?

- a) $G = (\Sigma, V, S, P)$, onde $\Sigma = \{a, b\}$, $V = \{A, B\}$, $S = A$, $P = \{ A \rightarrow Ba, B \rightarrow BB, Aa \rightarrow Bb, B \rightarrow b, B \rightarrow bA, A \rightarrow a, Ab \rightarrow \lambda \}$
- b) $G = (\Sigma, V, S, P)$, onde $\Sigma = \{0, 1\}$, $V = \{S\}$, $P = \{S \rightarrow 0S1, S \rightarrow \lambda \}$

Que linguagem é gerada pela gramática do item b?

20. Quais são as diferenças básicas entre um autômato finito determinístico e um não determinístico? Defina $T(M)$, o conjunto de cadeias aceitas pelo autômato M , para os dois tipos.

21. Dê a especificação e o diagrama de estados de um autômato finito não determinístico M que aceite a linguagem $(a + b)^*$ tal que nenhuma cadeia só de a 's ou só de b 's seja aceita. Obtenha o autômato determinístico M' equivalente a M . Construa uma gramática linear à direita que gere esta linguagem. Dê a expressão regular que representa esta linguagem.

22. Dê a especificação (Q, δ, Q_0, F) e o diagrama de estados de um autômato finito não determinístico (AFN) que aceite o conjunto de todas as cadeias que contenham dois 0 's consecutivos ou dois 1 's consecutivos. Teste para 011010 .

23. Considere gramáticas lineares à esquerda, que são gramáticas nas quais toda produção é da forma $A \rightarrow Ab$ ou $A \rightarrow b$, com $A \in V$ e $b \in \Sigma \cup \{\lambda\}$. Uma linguagem linear à esquerda é uma linguagem que pode ser gerada por uma gramática linear à esquerda. Mostre através de um exemplo, que as linguagens lineares à esquerda coincidem com as linguagens lineares à direita.

24. Dê a especificação $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ e o diagrama de estados de um autômato finito determinístico (AFD) que aceite cadeias de um alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$, com número par de 0 's e um número par de 1 's. Escreva a gramática linear à direita (GLD) equivalente a esse autômato e a expressão regular que representa a linguagem de estados finitos correspondente.

25. Seja $\Sigma = \{a, b\}$. Mostre que a linguagem L_1 que consiste de todas as cadeias nas quais o número de a 's é igual ao número de b 's não é regular.

26. Dado um alfabeto Σ . Considere a seguinte linha de raciocínio:

- a) Para qualquer cadeia $x \in \Sigma^*$, a linguagem $\{x\}$ é regular.
- b) Para quaisquer linguagens regulares A e B , a linguagem $A \cup B$ é regular.
- c) Toda linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ pode ser escrita como uma união de linguagens da seguinte forma: $L = \cup_{x \in L} \{x\}$.
- d) Portanto, toda linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ é regular.

Critique este argumento. As três hipóteses estão corretas? A lógica é válida? Se não, você pode identificar uma falha? A conclusão está correta?

27. Construa um autômato finito que aceite a linguagem regular $\{(ab)^*b^+c^+\}$ sem usar arcos- λ .

28. Dê o autômato finito determinístico que aceite a linguagem regular $L_2 = (b^+c^+ab)$. Qual é a gramática linear a direita G_2 que gera L_2 ?

29. Seja $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$ um autômato finito não determinístico (AFN) com mapeamento de transmissão de estado δ definida como

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\} & \delta(q_1, a) = \{q_0, q_1\} & \delta(q_2, a) = \{q_0, q_2\} \\ \delta(q_0, b) = \{q_0\} & \delta(q_1, b) = \emptyset & \delta(q_2, b) = \{q_1\} \end{array}$$

- a) Ache um autômato finito determinístico (AFD) que aceite o conjunto de cadeias aceitas por M ;
- b) Ache a gramática linear a direita (GLD) que gera a Linguagem de Estados Finitos (LEF) aceita por M ;
- c) Ache a expressão regular que represente esta linguagem.

1. Seja a seguinte definição: Uma gramática $G = (X, V, S, P)$ é *linear a direita* se toda produção for da forma $A \rightarrow bC$ ou $A \rightarrow b$, onde A e $C \in V$ e $b \in X \cup \{\lambda\}$. Agora seja a seguinte gramática $G1$ composta das seguintes produções: $A \rightarrow wB \mid w$, onde A e $B \in V$ e $w \in X^*$. Mostre que $L(G1)$ pode ser gerada por uma gramática linear a direita.

2. Considere uma gramática $G = (X, V, S, P)$, onde $X = \{0, 1\}$, $V = \{S\}$, $P = \{S \rightarrow 0S1, S \rightarrow 01\}$. Qual o tipo (menos complexo) desta gramática segundo a hierarquia de Chomsky? Dê a descrição formal da linguagem gerada por esta gramática. Se for possível, descreva o autômato finito, com o menor número de estados possível, que aceite esta linguagem.

3. Quais são as diferenças básicas entre um autômato finito determinístico (AFD) e um não determinístico (AFN)? Defina $T(M)$, o conjunto de cadeias aceitas pelo autômato M , para os dois tipos.

4. Dê a especificação e o diagrama de estados de um autômato finito não determinístico (AFN) M que aceite a linguagem $(a + b)^*$ tal que nenhuma cadeia só de a 's ou só de b 's seja aceita. Obtenha o autômato determinístico

(AFD) M' equivalente a M . Construa uma gramática linear à direita que gere esta linguagem. Dê a expressão regular que representa esta linguagem.

5. Dê a especificação (Q, δ, Q_0, F) e o diagrama de estados de um autômato finito não determinístico (AFN) que aceite o conjunto de todas as cadeias que contenham dois 0's consecutivos ou dois 1's consecutivos. Teste para 011010.
6. Considere gramáticas lineares à esquerda, que são gramáticas nas quais toda produção é da forma $A \rightarrow Ab$ ou $A \rightarrow b$, com $A \in V$ e $b \in X \cup \{\lambda\}$. Uma linguagem linear à esquerda é uma linguagem que pode ser gerada por uma gramática linear à esquerda. Mostre através de um exemplo, que as linguagens lineares à esquerda coincidem com as linguagens lineares à direita.
7. Dê a especificação (Q, δ, q_0, F) e o diagrama de estados de um autômato finito determinístico (AFD) que aceite cadeias de um alfabeto $X = \{0,1\}$, com número par de 0's e um número par de 1's. Escreva a gramática linear à direita (GLD) equivalente a esse autômato e a expressão regular que representa a linguagem de estado finito correspondente.
8. Seja $X = \{a, b\}$. Mostre que a linguagem L_1 que consiste de todas as cadeias nas quais o número de a 's é igual ao número de b 's não é regular.
9. Dado um alfabeto X . Considere a seguinte linha de raciocínio:
 - e) Para qualquer cadeia $x \in X^*$, a linguagem $\{x\}$ é regular.
 - f) Para quaisquer linguagens regulares A e B , a linguagem $A \cup B$ é regular.
 - g) Toda linguagem $L \subseteq X^*$ pode ser escrita como uma união de linguagens da seguinte forma: $L = \cup_{x \in L} \{x\}$.
 - h) Portanto, toda linguagem $L \subseteq X^*$ é regular.

Critique este argumento. As três hipóteses estão corretas? A lógica é válida? Se não, você pode identificar uma falha? A conclusão está correta?

10. Construa um autômato finito que aceite a linguagem regular $\{(ab)^*b^+c^+\}$ sem usar arcos- λ .
11. Dê o autômato finito determinístico (AFD) que aceite a linguagem regular $L_2 = (b^+c^+ab)$. Qual é a gramática linear à direita G_2 que gera L_2 ?
12. Seja $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$ um autômato finito não determinístico (AFN) para $X = \{a, b\}$, com mapeamento de transmissão de estado δ definida como

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\} & \delta(q_1, a) = \{q_0, q_1\} & \delta(q_2, a) = \{q_0, q_2\} \\ \delta(q_0, b) = \{q_0\} & \delta(q_1, b) = \emptyset & \delta(q_2, b) = \{q_1\} \end{array}$$

- d) Ache um autômato finito determinístico (AFD) que aceite o conjunto de cadeias aceitas por M ;
- e) Ache a gramática linear a direita (GLD) que gera a Linguagem de Estado Finito (LEF) aceita por M ;
- f) Ache a expressão regular que represente esta linguagem.

13. Seja a linguagem $L \subset \{0, 1\}^*$ constituída de cadeias que contêm a subcadeia **10** a sua extrema direita. Exemplo: $10010 \in L$, enquanto que $010100 \notin L$.

- a) Escreva um autômato finito não-determinístico (AFN) que aceite a linguagem L ;
- b) Escreva o autômato finito determinístico (AFD) que aceite L ;
- c) Escreva a expressão regular equivalente a L ;
- d) Escreva a gramática linear a direita, sem produções- λ , que gera L .

14. Considere a seguinte linguagem:

$$L_1 = \{ w \mid w \in (a + b)^* \text{ tal que haja número par de duplas de ba's} \}$$

Exemplo: a cadeia **abaabbaba** não deve ser aceita, enquanto que a cadeia **baabba** deve. Se possível, escreva o autômato finito determinístico (AFD) que processa L_1 e dê a gramática linear a direita equivalente. Se não for possível explique o porquê.

15. Dê o diagrama de estados de um autômato finito determinístico (AFD) que aceite a linguagem dada pela expressão regular $(b^* + (ab)^*)$. Escreva a gramática equivalente.